Das

Rollen einer Fläche zweiten Grades

auf einer invariablen Ebene.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der academischen Doctorwürde

einer hohen philosophischen Facultät

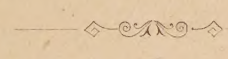
der

Universität München

vorgelegt von

Wilhelm Hess,

Lehramtsverweser an der k. Kreisrealschule.



1880.

Buchdruckerei Jos. Krämer, München.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554609_0110

Vorwort.

Seit den fundamentalen Arbeiten Jacobi's (sur la rotation d'un corps. Op. II. S. 139—197) und Poinsot's (théorie nouvelle etc. Liouville J. Jahrg. 1851. S. 9 – 129 und S. 289—336) über die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ist dieses Thema in der ausgedehntesten Weise, sei es, dem Beispiele Jakobi's folgend, auf analytischem, sei es auf Grund von Poinsot's Centralellipsoid auf geometrischem Wege behandelt worden. Ein Verzeichniss der älteren Literatur über diesen Gegenstand lässt Cayley seiner Arbeit „on the special problems of dynamics" (Reports of the Brit. Ass., Jahrg. 1863) folgen, von den neueren Arbeiten mögen am Schlusse dieser Einleitung jene, von denen wir noch näher Kenntnis nehmen mussten, angereiht werden.

Durch Behandlung des angegebenen Stoffes haben wir nun dreierlei im Auge, was wir bei den Autoren, die wir zu Rate gezogen, mehr oder minder vermisst haben:

1) Eine erschöpfende Untersuchung der Polcurven Poinsot's, ihre Veränderung mit einer Variierung der Constanten des Problems, eine Classification auf Grund ihrer besonderen Eigenschaften und eine bildliche Darstellung durch numerische Berechnungen und graphische Ausführungen.

2) Eine Ausdehnung des Ganzen auf die beiden Hyperboloide; Modifikationen bei speziellen Flächen II. Grades, wie Rotations-, Cylinderflächen u. a.

3) Die Ableitung der 9 Neigungscosinus Jacobi's aus den Eigenschaften der Polcurven, somit eine Verbindung der Arbeiten Jacobi's und Poinsot's.

Eingeführt in diese Arbeit wurde ich von Herrn Professor Dr. Brill und fühle ich mich verpflichtet, demselben für die vielfache Anregung, die er mir während derselben angedeihen liess, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Einschlägige Literatur.

I. Analytisch.

Brill: sul problema della rotazione dei corpi. (Annali di Matematica serie II. t. III. S. 33—39).

Hermite: sur quelques applications des fonctions elliptiques. (Comptes rendus Jahrgänge 1877 und 1878.)

II. Geometrisch.

Sylvester: on the motion of a rigid body etc. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Jahrg. 1866. S. 757—780. u. Proceedings of the R. S. Jahrg. 1866. S. 139—144.) Hiezu

Ferrers: note on Sylvesters representation etc. (Phil. Trans. Jahrg. 1870. S. 1—8).

Walton: on the relation etc. (Quarterly Journal J. 1870. S. 1—14).

Routh: some new theorems etc. (Proc. of the R. S. J. 1873. S. 233—243).

Chelini: determinazione analitica etc. (Memorie dell' Accademia di Bologna serie I, t. X.)

Siacci: Memorie della Società italiana delle Scienze, serie III. t. III.

v. Obermayer: über die experimentelle Demonstration der Poinsot'schen Drehungstheorie. (Carl, Repertorium der Experimentalphysik, J. 1879. S. 361—363).

Inhaltsangabe.

Fixierung des Problems.

Der bewegliche Kegel der instantanen Drehachsen und die Polhodie.

§ 1. Der Momentanachsenkegel abhängig von H.
§ 2. Die Projectionen der Polhodie auf die Coordinatenebenen.
§ 3. Die Coordinaten der Polhodie in Funktion des Radiusvector.
§ 4. Besondere Flächen zweiten Grades.

Die Elementareigenschaften der Herpolhodie.

§ 5. Die Radien der Grenzkreise.
§ 6. Der Ring der Herpolhodie.
§ 7. Die Grenzkreise bei den Hyperboloiden.
§ 8. Die Herpolhodie besonderer Flächen.

Differential- und Integralgleichungen der Polcurven.

§ 9. Die Radienvectoren U, V ausgedrückt durch die Zeit t.
§ 10. Der Polarwinkel der Herpolhodie.
§ 11. Untersuchung auf Wendepunkte
§ 12 Der Winkel φ_K einer halben Welle.
§ 13. Ueber den Schluss der Herpolhodiewellen.
§ 14. Weitere Eigenschaften der Herpolhodie.
§ 15. Die Spirale für H = B.
§ 16. Numerische Fälle.
§ 17. Die Herpolhodie des einschaligen Hyperboloids.
§ 18. Die Herpolhodie des zweischaligen Hyperboloids.
§ 19. Die Herpolhodie der Rotationsflächen.
§ 20. Classification der verschiedenen Herpolhodieformen

Das bewegliche Coordinatensystem der 3 Hauptaxen.

§ 21. Die rechtwinkeligen Coordinaten der Polcurven in Function der Zeit.
§ 22. Die 9 Cosinus der Neigungswinkel der Achsen X′, Y′, Z′ gegen die Achsen (X), (Y), Z.

Fixierung des Problems.

Eine Fläche zweiten Grades mit gegebenem festen Mittelpunkt O drehe sich so um den letzteren, dass sie auf einer unveränderlichen Tangentialebene ohne zu gleiten abrollt d. h. dass sie in einem bestimmten Augenblicke mit einem ihrer Punkte diese „invariable“ Ebene berührt und um den Verbindungsstrahl dieses Punktes mit O rotiert. Es entstehen dann durch diese Bedingung des Kreiselns, wie man die Bewegung wol auch nannte, sowol auf der Fläche als der Ebene je eine Kurve, deren einzelne Punkte in der Weise einander zugehören, dass durch Aufeinanderlegen eines entsprechenden Punktepaares die Lage der beweglichen Fläche gegen die fixe Ebene völlig bestimmt erscheint. Die Drehung selbst lässt sich durch das Abwälzen der Flächenkurve auf jener der Ebene oder auch der durch sie repräsentierten, in O concentrischen, Kegel versinnlichen und es ist im Augenblicke der Drehung die gemeinsame Erzeugende der 2 Kegel die Drehachse, analog der gemeinsame Punkt der Kurven der Drehpol. Um einer längeren Ausdrucksweise überhoben zu sein, nennen wir die von dem instantanen Drehpol auf der Fläche (scheinbar) beschriebene Kurve „Polhodie“, die in der Ebene beschriebene „Herpolhodie“, gemäss den Bezeichnungen beim Poinsot'schen Centralellipsoid*), während die vom Mittelpunkt O auf die invariable Ebene gefällte Normale die Bezeichnung, „invariable Linie“ führen möge.**) Die Gleichungen der Polhodie beziehen wir am einfachsten auf das Coordinatensystem der Hauptachsen der Fläche.

---

*) P. II. 102. (P. bedeutet Poinsot und ist damit dessen eingangserwähnte Arbeit gemeint).

**) Sylvester: on the motion of a rigid body etc. (Proc. of the Roy. Soc. XV.)

Ist nun $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \varepsilon$ die Gleichung der rollenden Fläche, worin ε 0 oder 1 ist, A, B, C dagegen die reciproken Quadrate der Halbachsenlängen vorstellen, und setzen wir A stets als positiv voraus, was der Allgemeinheit keinerlei Abbruch thut, so können B und C beide positiv oder beide negativ oder endlich B positiv, C negativ — die umgekehrte Verteilung der Zeichen im letzten Fall lässt keine andere Flächenart erscheinen — gewählt werden. Da, wo eine Feststellung der Grössenordnung in der Reihe A, B, C angezeigt ist, also besonders dann, wenn mehrere der Grössen gleiche Zeichen besitzen, nehmen wir an, dass dem absoluten Werte nach

$$A < B < C \text{ sei.}$$

Ist $\frac{1}{\sqrt{H}}$ der Abstand von Mittelpunkt und invariabler Ebene, eine Bezeichnung, die übereinstimmend mit jener der Halbachsen befunden wird, so ist $\frac{1}{\sqrt{H}} = \frac{1}{\sqrt{(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2}}$, woraus

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = H$$

Vorstehende Gleichung stellt eine mit der Ausgangsfläche coaxiale Fläche zweiten Grades dar; der Durchschnitt der rollenden Fläche mit dieser oder auch mit dem für sie zu substituierenden Momentanachsenkegel

$$Ax^2(\varepsilon A - H) + By^2(\varepsilon B - H) + Cz^2(\varepsilon C - H) = 0$$

stellt die Polhodie vor, welche sonach eine doppelt gekrümmte Kurve 4. Ordnung ist. Sie besteht aus 2 getrennten, symmetrischen Aesten; gemeinhin werden wir aber nur von jenem sprechen, der mit der invariablen Ebene in Contact kommt und ihn als Polhodie bezeichnen.

Die Polhodie wird völlig unbestimmt, wenn die rollende Fläche ein Kegel ist: es ist dafür $\varepsilon = 0$ und, da die invariable Ebene die Kegelspitze enthält, $H = \infty$. Die Gleichung des rollenden Kegels $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ ist dann zugleich die für den Kegel der Polhodie und kann als letztere Kurve jede auf dem Kegel zu zeichnende Linie aufgefasst werden; die Herpolhodie ist natürlich ebenfalls ∞ deutig, so dass der Fall $\varepsilon = 0$ künftighin als absolviert betrachtet werden kann.

Der bewegliche Kegel der instantanen Drehachsen und die Polhodie.

Die Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, in welcher A, B, C allgemein gegeben sein mögen, stellt dar:

ein Ellipsoid, wenn $A +$, $B +$, $C +$,
ein einschaliges Hyperboloid, wenn $A +$, $B +$, $C -$,
ein zweischaliges Hyperboloid, wenn $A +$, $B -$, $C -$.

Wie ersichtlich gehen die Gleichungen, welche für die beiden letzteren Flächen Geltung haben, durch einfache Aenderung von Vorzeichen aus den für das Ellipsoid statt habenden hervor; es können sonach mit leichter Mühe alle bei der letzten Fläche gewonnenen Sätze und Resultate auf die andern übertragen werden. In der That werden wir in dieser Art die Discussion erledigen und immer, so lange nichts Weiteres gesagt ist, A, B, C als auf das Ellipsoid bezüglich annehmen.

§. 1. Der Momentanachsenkegel abhängig von H.

Ellipsoid. Zur Reellität des Kegels

$$Ax^2 (A-H) + By^2 (B-H) + Cz^2 (C-H) = 0$$

ist erforderlich, dass die Differenzen $A-H$, $B-H$, $C-H$ nicht alle dasselbe Zeichen haben, woraus die Ungleichungen folgen:

$$A < H < C$$

Geometrisch heisst das: die invariable Ebene kann vom Centrum O keine grössere Entfernung haben als die grösste Halbachse $\frac{1}{\sqrt{A}}$, keine kleinere als die kleinste Halbachse $\frac{1}{\sqrt{C}}$ des Ellipsoids. Die Kegelgleichung wird also

$$A x^2 (H-A) - B y^2 (B-H) - C z^2 (C-H) = 0$$

und es läuft der Kegel um die X Achse , wenn $H < B$,
um die Z Achse , wenn $H > B$.

Dazwischen steht naturgemäss der Fall $H = B$, für den der Kegel in ein Ebenenpaar $A x^2 (B-A) - C z^2 (C-B) = 0$ übergegangen ist. Dasselbe schneidet sich in der Y Achse und ist gegen die X Achse unter den aus $\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}$

hervorgehenden Winkeln φ resp. $180 - \varphi$ geneigt; das Ellipsoid wird davon nach 2 congruenten Ellipsen geschnitten, deren kleinere Halbachsen durch die mittlere des Ellipsoids,

$$\frac{1}{\sqrt{B}},$$ deren grössere durch

$$\sqrt{\frac{A+C-B}{AC}}$$ dargestellt werden.

Das ganze Ellipsoid wird durch diese ebenen Schnitte in 2 Keile zerlegt; im einen läuft die Momentanachse um die Achse OX, im andern um OY. Der Uebergang findet eben für $H = B$ statt, wofür die Polhodie — d. h. deren einer Ast — in eine ebene Kurve übergegangen ist.

Für $H = A$ und $H = C$ zerfällt der Kegel der Polhodie gleichfalls, jedesmal in ein conjugiert imaginäres Ebenenpaar, das sich in der X- bezw. Z- Achse reell durchsetzt; die Polhodie reduciert sich in beiden Fällen auf den Scheitelpunkt der Achse, also, wenn man will, auf eine unendlich kleine Kurve.

Es ist nicht uninteressant, des Zusammenhangs zu erwähnen, der zwischen dem für $H = B$ auftretenden Ebenenpaar und den Hauptkreisschnitten des Ellipsoids, die ja auch durch die Y Achse gehen, statt hat.

Sind ψ, $180 - \psi$ die Neigungen der letzteren gegen die X Achse, so ist bekanntlich $\operatorname{tg} \psi = \pm \sqrt{\frac{B-C}{C-B}}$, so dass also

$\operatorname{tg} \varphi : \operatorname{tg} \psi = \sqrt{A} : \sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{A}} =$ kleinste Achse : grösste Achse.

Dies Resultat liegt im folgenden interessanten Satz ausgesprochen: „Die Winkel, welche die Spuren der Hauptkreisschnitte in der Ebene XZ mit der X Achse bilden, sind die Anomalieen zu jenen Winkeln, welche die Spuren der für $H = B$ auftretenden Ebenen damit bilden“ . . . . . Fig. I.

Einschaliges Hyperboloid. Es ist

$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 1$ die Gleichung der Fläche,

$Ax^2 (H - A) + By^2 (H - B) - Cz^2 (H + C) = 0$

jene des Kegels; derselbe ist reell, wenn $H > A$ und läuft wieder, je nachdem $H \lessgtr B$ um die X- oder Z-Achse.

Für $H = B$ treten wieder zwei sich in der Y-Achse durchsetzende Ebenen, $A x^2 (B - A) - C z^2 (B + C) = 0$ auf, deren Neigungen aus $\operatorname{tg} \varphi' = \pm \sqrt{\frac{A (B-A)}{C (C+B)}}$ entspringen.

Auch das Hyperboloid wird sonach in zwei Keile, der eine die X-, die andere die imaginäre Z-Achse enthaltend, geschieden durch das die Polhodie für $H = B$ darstellende Paar von Ellipsen.

Für $H = A$ tritt wieder sozusagen, die X Achse als Kegel, ihr Scheitel als Polhodie auf; für $H = \infty$, der jetzigen oberen Grenze von H, wird der Asymptotenkegel der der instantanen Drehachsen, der unendlich ferne Kegelschnitt des Hyperboloids also die Polhodie.

Der Zusammenhang des die 2 Keile scheidenden Ebenenpaars mit einem andern sich in der Y-Achse schneidenden, für die Fläche charakteristischen, wie z. B. mit demjenigen, das zugleich den Asymptotenkegel berührt, liefert auch Sätze, die aber nicht einen einfachen und präzisen Zusammenhang erkennen lassen.

Zweischaliges Hyperboloid. Die einzige Bedingung, dass der Kegel

$$A x^2 (H - A) - B y^2 (H + B) - C z^2 (H + C) = 0$$

die Fläche $A x^2 - B y^2 - C z^2 = 1$ reell schneidet, ist $H > A$. Derselbe bewegt sich ausschliesslich um die reelle Achse OX, von der er für $H = A$ ausgeht, um immer sich zu erweitern und für $H = \infty$ mit dem Asymptotenkegel zusammenzufallen. Die Grenze der Polhodie bilden wieder die unendlich kleine Kurve des Scheitels der reellen Achse und der ∞ ferne Kegelschnitt des zweimanteligen Hyperboloids.

§ 2. Die Projectionen der Polhodie auf die Coordinaten-Ebenen.

Eliminiert man aus den Gleichungen der Fläche 2. Grades

und des jedesmaligen Kegels immer je 1 Coordinate, so zeigen die entstehenden Gleichungen die Richtigkeit des Satzes:

„Die in den Coordinatenebenen entstehenden Projectionskurven der Polhodie sind ähnliche und ähnlich gelegene Mittelpunktskegelschnitte.“

Ellipsoid. Die genannten Gleichungen lauten:

$$B y^2 (B - A) + C z^2 (C - A) = H - A;$$
$$C z^2 (C - B) - A x^2 (B - A) = H - B;$$
$$A x^2 (C - A) + B y^2 (C - B) = C - H.$$

In der YZ Ebene entstehen vom Coordinatenanfangspunkt ($H = A$) an eine Reihe Vollellipsen, deren grosse Achsen in der Y-Achse gelegen sind und die ihre Grenze in der für $H = B$ erscheinenden Ellipse

$$B y^2 (B - A) + C z^2 (C - A) = (B - A)$$ erreichen.

Darüber hinaus entstehen Ellipsenbögen, welche mit dem Scheitelpunkt der kleinsten Achse des Ellipsoids ihren Abschluss finden (für $H = C$).

In der XY Ebene treten gleichfalls nur Ellipsen als Kegelschnitte auf: von $H = A$ bis $H = B$ Ellipsenbögen, für $H = B$ die erste Vollellipse

$$A x^2 (C - A) + B y^2 (C - B) = C - B$$

und weiter ganze Ellipsen, die von $H = B$ bis $H = C$ kleiner und kleiner werden; Anfang und Schluss der betrachteten Curvenschaar bilden die Scheitelpunkte der X- und Y-Achse.

Die Kurven der XZ Ebene sind Hyperbeln, von $H = A$ ab mit der X Achse als der reellen, von $H = B$ ab mit der Z Achse als der reellen Achse. Die conjugierten Hyperbelbögen werden geschieden durch die Asymptoten, in die sie für $H = B$ übergehen; die übrigen Eigenschaften teilen sie mit den vorangehenden Ellipsen.

Einschaliges Hyperboloid. Dasselbe gibt zu den Projektionsgleichungen

$$By^2\ (B-A)+Cz^2\ (C+A)=H-A,$$
$$Cz^2\ (B+C)-Ax^2\ (B-A)=H-B,$$
$$Ax^2\ (C+A)+By^2\ (C+B)=H+C$$

Veranlassung.

In der YZ Ebene entstehen wieder Ellipsen und Ellipsenbögen, deren grössere Achsen in der Y- oder der Z-Achse gelegen, je nachdem $C \gtrless B-A$; sie beginnen mit dem Mittelpunkte O und gehen bis ins Unendliche. — In der XY Ebene entstehen Ellipsenbögen und Ellipsen, welche die Kehlellipse von aussen umfassen, vom Scheitelpunkt der X Achse anheben und immer wachsend zuletzt unendlich gross werden. — In der XZ Ebene endlich entstehen conjugierte Hyperbelbögen, wie beim Ellipsoid durch das charakterische Asymptotenpaar geschieden und bis ins Unendliche reichend

Zweischaliges Hyperboloid.

$$By^2\ (B+A)+Cz^2\ (C+A)=H-A,$$
$$Cz^2\ (C-B)+Ax^2\ (A+B)=H+B,$$
$$Ax^2\ (C+A)-By^2\ (C-B)=H+C.$$

In der Ebene YZ entstehen diesmal nur Vollellipsen, mit der Richtung der Y-Achse als der grösseren Achse; ihre untere Grenze ist der Punkt O, ihre obere natürlich eine unendlich grosse Ellipse. — Die XZ Ebene weist nur Ellipsenbögen auf, deren grosse Achsen für $C>A+B$ in der X-, für $C<A+B$ in der Y-Achse gelegen sind. — Die XY Ebene trägt nur Hyperbelbögen mit der X-Achse als reeller Achse.

Das zweischalige Hyperboloid weist darin, dass die Figuren in der XY- und XZ-Ebene gegenüber den der andern Flächen vertauscht sind, eine kleine Verschiedenheit auf in der Reihenfolge der Kurven; dieselbe kann gehoben werden, wenn man die Y- und Z-Achse, besser B und C vertauscht oder die Umgleichung $B<C$ nicht für die absoluten, sondern die negativen Werte von B und C gelten lässt; wir lassen es jedoch bei der getroffenen Festlegung.

§ 3. Die Coordinaten der Polhodie in Funktion des Radiusvector.

U sei die Länge des von O zum Punkte x, y, z der Polhodie gezogenen Radiusvector, so dass $U^2 = x^2 + y^2 + z^2$ als dritte Gleichung zu der der gegebenen Fläche und des Momentanachsenkegels hinzutritt. Dann können x, y, z ausgedrückt werden durch U.

Ellipsoid. Es ergeben sich unter Anwendung der abgekürzten Bezeichnung.*)

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{H}{BC} = \frac{B+C-H}{BC} \\ \beta^2 &= \frac{1}{C} + \frac{1}{A} - \frac{H}{CA} = \frac{C+A-H}{CA} \\ \gamma^2 &= \frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{H}{AB} = \frac{A+B-H}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (1), \text{ woraus}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \frac{(B-A)(C-H)}{ABC} \\ \beta^2 - \gamma^2 &= \frac{(C-B)(H-A)}{ABC} \\ \alpha^2 - \gamma^2 &= \frac{(C-A)(H-B)}{ABC} \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

für die Coordinaten der Polhodie die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{BC\,(U^2-\alpha^2)}{(B-A)(C-A)} \\ y^2 &= \frac{CA\,(\beta^2-U^2)}{(C-B)(B-A)} \\ z^2 &= \frac{AB\,(U^2-\gamma^2)}{(C-A)(C-B)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für $H > B$ ist $\beta > U > \alpha > \gamma$,
„ $H < B$ „ $\beta > U > \gamma > \alpha$,

Der grösste Wert β des Radiusvector U wird jedesmal erreicht für seine Lage in der XZ Ebene, der kleinste α in der YZ Ebene, wenn $H > B$, der kleinste γ in der XY Ebene, wenn $H < B$ ist.

Hyperboloide. Die hieher gehörigen Form sind aus den vorstehenden durch bekannte Aenderung der Zeichen von C resp. B und C zu erreichen.

*) P. II. 106.

Das einschalige Hyperboloid stimmt hinsichtlich des Verhaltens von U genau mit dem Ellipsoid überein, dagegen liegt beim andern Hyperboloid der Maximalradius γ jedesmal in der XY Ebene, der Minimalradius β in der XZ-Ebene und α ist selbstverständlich imaginär.

§ 4. Besondere Flächen zweiten Grades.

Im Vorausgehenden wurden jene Modifikationen der Polhodie in Betracht gezogen, welche sie für $H = A$, $H = B$, $H = C$, also für die 3 Abstände der Halbachsen bei allgemein gegebener Fläche erlitt. Variiert man A, B, C, so ändert sich die Fläche, ohne dass natürlich die Polhodie einen anderen Typus haben wird. Erst, wenn A, B, C ganz spezielle Werte erreichen, wird die Polhodie in anderer Gestalt auftreten und auch hier für die Abstände $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$ der invariablen Ebene, so weit sie nicht versagen, besonders, also — sit venia verbo — doppelt speziell werden.

Die speziellen Werte, die wir im Aug haben, sind naturgemäss die folgenden:

$$A = 0,\ B < C;\ A = A,\ B = C;\ B = A,\ C = C;$$
$$A = B = C = H;\ A < B,\ C = \infty = H.$$

Wir geben in kurzem die Modifikationen der Fläche, des Kegels der Drehachsen und die Polhodie an:

1) $A = 0$, $B < C$, $(B < H < C)$: Cylinder senkrecht der YZ Ebene.

Der Kegel degeneriert in ein Ebenenpaar durch die X Achse, die Polhodie in 4 Erzeugende; die Gebilde sind nur reell beim Ellipsoid, wo die Gleichungen

$B y^2 + C z^2 = 1$, $B y^2 (H - B) - C z^2 (C - H) = 0$, und 1 sch. Hyperboloid, wo die Gleichungen

$B y^2 - C z^2 = 1$, $B y^2 (H - B) - C z^2 (H + C) = 0$ lauten. —

Corollar: Auch B oder C lässt sich 0 setzen, wenn es mit A ungleiches Zeichen hat; es entstehen hyperbolische Cylinder,

senkrecht andern Coordinatenebenen, von denen aber analog das obige gilt.

2.
3. $A < B, C = B$ und $B = A,\ B < C$: Rotationsflächen.

Die Kegel gehen in Kreiskegel, die Polhodien in Parallelkreise über, die Unterschiede der 2 getrennten Keile schwinden. Abstände der Kreise vom Centrum der Fläche und Radien derselben sind leicht zu finden und bedürfen keiner Diskussion.

4) $A = B = C = H$: Kugel.

Man kann jede Achse derselben als X Achse nehmen, jeden Punkt der Kugel sonach als deren Scheitelpunkt d. h. als Polhodie, wie auch aus den Gleichungen auf analytischem Wege ersichtlich.

5) $C = \infty\ A < B$: Doppelebene.

Je näher C an die Grenze ∞ geht, desto mehr nähert die kleinste Achse $\frac{1}{\sqrt{C}}$ der Null, bis die Fläche im Grenzfall eine unendlich dünne Platte geworden, die als Contour eine Ellipse (oder Hyperbel) besitzt. Der Kegel der Momentanachsen ist dabei in dieselbe Doppelebene übergegangen, die Polhodie in einen Bogen der Contour.

Wir haben dieses Spezialfalles Erwähnung gethan, weil die Reduktion eines um einen festen Punkt rotierenden Körpers nach Sylvester's fundamentaler Arbeit*) auf eine um diesen Punkt sich drehende unendlich dünne Platte stets (und zwar auf doppelte Art) ermöglicht ist, der vorliegende Fall also eine ausgezeichnete Rolle in der Theorie der Rotation spielt.

6) Weitere Spezialfälle, wenn auch nicht fundamental, können dadurch in Menge gebildet werden, dass man zwischen A, B, C eine Relation bestehen lässt. So z. B. kann man fragen, wann die Projektionen der Polhodie auf die 3 Coordinatenebenen spezielle Form annehmen, etwa gleichseitige Hyperbeln

*) Sylvester: on the motion of a rigid body acted on by no external forces (Philosophical Trans. of the Roy. Soc. of London, Bd. 156. S. 757—780). Auszugsweise auch unter dem gleichen Titel in den schon citierten Proceedings of the R. S. of L. (Bd. 15. S. 139 u. ff.)

oder Kreise und dergl., doch liefern die so zu erhaltenden Relationen von A, B, C wenig Bemerkenswertes. Nur das eine möchten wir hervorheben, dass in der XY Ebene Kreise entstehen, wenn $C = A + B$ ist, ein Fall, der später noch genannt werden wird.

Die Elementareigenschaften der Herpolhodie.

§ 5. Die Radien der Grenzkreise.

Die Polhodie war eine symmetrisch zu den Coordinatenachsen gelegene Kurve, deren 4 Quadranten der Radiusvector beschrieb, indem er von einem Maximal- zu einem Minimalwert lief und umgekehrt. Es ist hiedurch klar, dass die Herpolhodie, welche durch Abrollen der ersteren Kurve auf der invariablen Ebene beschrieben wird, zwischen 2 concentrischen Kreisen eingeschlossen bleibt, deren Mittelpunkt M der Fusspunkt der invariablen Achse auf der invariablen Ebene ist; der grössere Radius sei V_g, der kleinere V_k, so werden wir uns zunächst nur mit ihnen beschäftigen, und zwar zunächst fürs Ellipsoid.

Im Falle $H > B$ ist $V_g{}^2 = \beta^2 - \frac{1}{H}$, $V_k{}^2 = \alpha^2 - \frac{1}{H}$,

„ „ $H < B$ $V_g{}^2 = \beta^2 - \frac{1}{H}$, $V_k{}^2 = \gamma^2 - \frac{1}{H}$.

Mit Rücksicht auf die Formeln (1) erhält man, wenn

$$H > B \qquad\qquad H < B$$

$$\left.\begin{aligned} V_g &= \sqrt{\frac{(H-A)(C-H)}{ACH}} \\ V_k &= \sqrt{\frac{(H-B)(C-H)}{BCH}} \end{aligned}\right\} (4), \qquad \left.\begin{aligned} V_g &= \sqrt{\frac{(H-A)(C-H)}{ACH}} \\ V_k &= \sqrt{\frac{(H-A)(B-H)}{ABH}} \end{aligned}\right\} (5).$$

Sämmtliche 4 Werte sind abhängig von H und immer je 2 der Constanten A, B, C. Nimmt man letztere Werte fest d. h. ein bestimmt gegebenes Ellipsoid, so variiert V_g, V_k nur mit H:

Für $H = A$ werden V_g und V_k beide der Null gleich; für wachsende H kann jeder der 2 Radien zu- und abnehmen,

für $H = B$ wird $V_g = \sqrt{\frac{(B-A)(C-B)}{ABC}}$, V_k dagegen wieder 0, für den Endwert $H = C$ werden beide wieder gleichzeitig 0. Daraus folgt aber, dass V_g ein Maximum für einen gewissen Wert von H, V_k deren 2 — einen im Intervalle A bis B, den anderen im Intervalle B bis C — erlangt; die Werte von H, welche diese Maxima hervorrufen, werden auf gewöhnliche Art aus $\frac{dV_g}{dH} = 0$, $\frac{dV_k}{dH} = 0$ gefunden.

V_g erreicht für $H = \sqrt{AC}\left(\gtrless B\right)$ sein Maximum $V_g = \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{C}}$,

V_k „ „ $H = \sqrt{AB}\ (< B)$ das erste „ $V_k = \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}$,

V_k „ „ $H = \sqrt{BC}\ (> B)$ das zweite „ $V_k = \frac{1}{\sqrt{B}} - \frac{1}{\sqrt{C}}$.

Zu diesen charakteristischen Werten von H kann noch der Wert $H = \frac{AC}{B}$ gerechnet werden, der V_g dieselbe Grösse erteilt, welche V_g im Spezialfalle $H = B$ besitzt und am Ende die analogen, $H = \frac{BA}{C}$, $H = \frac{CB}{A}$, denen freilich eine geometrische Beutung in dieser Weise nicht gegeben werden kann.

Zur genauen Darstellung der Polkurven sind demnach die Werte $H = A$, $H = \frac{AC}{B}$, $H = \sqrt{AC}$, $H = \frac{AB}{C}$, $H = \sqrt{AB}$, $H = B$, $H = \sqrt{BC}$, $H = \frac{BC}{A}$, $H = C$ ganz besonders empfehlenswert; natürlicherweise könnte man noch sehr viele Werte von H finden, welche in irgend einer Weise näher mit dem Probleme verknüpft sind: man könnte immer jene Werte von H aufstellen, welche für V_k denselben Ausdruck liefern u. s. w. Ein eingreifendes Interesse haben diese Fälle keinenfalls; gelegentlich mag nur bemerkt werden, dass die zwei Maxima des kleineren Radius der Herpolhodie für jenes Ellipsoid einander gleich werden, dessen mittlere Achse das arithmetische Mittel der grossen und kleinen ist.

§ 6. Der Ring der Herpolhodie.

Die Breite desselben, $V_g - V_k$, ist für die völlige Kenntnis der Herpolhodie natürlich sehr wichtig. Variabel mit H, ist sie am schmalsten in den Grenzfällen $H = A$, $H = C$, wo ja beide Radien 0 werden; von da ab kann sie steigen oder fallen, weshalb die Frage nach ihrem Maximum wol berechtigt ist.

1) $H > B$.

Der Wert $H = \sqrt{AC}$, der V_g zum Maximum stempelt, gehört natürlich nur unter diese Untersuchung, wenn $AC > B^2$. Denn wenn $AC < B^2$, erreicht V_g sein Maximum im Intervalle von $H = B$ bis $H = C$ gar nicht, sondern seinen grössten Wert für $H = B$ und da hiefür $V_k = 0$, hat der Ring seine grösste Breite, V_g selbst, erlangt. Ist aber thatsächlich $AC > B^2$, so differenzieren wir $V_g - V_k = \sqrt{\frac{(H-A)(C-H)}{ACH}} - \sqrt{\frac{(C-H)(H-B)}{BCH}}$ nach H und setzen das Resultat 0, woraus sich ergibt

$$(H^2-AC)\sqrt{B}\,(H-B) - (H^2-BC)\sqrt{A}\,(H-A) = 0$$

Ist nun $\sqrt{BC} > H > \sqrt{AC}$, so ist $(H^2-AC)\sqrt{B}\,(H-B) + (BC-H^2)\sqrt{A}\,(H-A)$ durchweg positiv; ist $\sqrt{AC} > H > B$, so muss $(AC-H^2)\sqrt{B}\,(H-B) - (BC-H^2)\sqrt{A}\,(H-A) = 0$ sein; letztere Bedingung ist aber ein Widerspruch dagegen, dass wegen der Ungleichungen

$$(AC-H^2)\sqrt{B} < (BC-H^2)\sqrt{A}\ ^*)$$
$$\sqrt{H-B} < \sqrt{H-A}$$

die obige Differenz wesentlich negativ sein muss.

Im Falle $C > H > \sqrt{BC}$ endlich ist

$$\frac{H^2-AC}{H^2-BC} > \frac{H-A}{H-B}\,,\quad \frac{B\,(H^2-AC)}{A\,(H^2-BC)} > \frac{B\,(H-A)}{A\,(H-B)}\,,$$

weiter wegen $\sqrt{B\,(H-A)} > \sqrt{A\,(H-B)}$

$$\frac{B\,(H^2-AC)}{A\,(H^2-BC)} > \sqrt{\frac{B\,(H-A)}{A\,(H-B)}} \quad \text{d. h.}$$

$$(H^2-AC)\sqrt{B}\,(H-B) - (H^2-BC)\sqrt{A}\,(H-A) > 0$$

*) Weil $AC\sqrt{B} - BC\sqrt{A} < H^2\,(\sqrt{B}-\sqrt{A})$, indem die linke Seite negativ, die rechte positiv.

Für die Dicke $V_g - V_k$ des Ringes tritt im Intervalle von $H = B$ bis $H = C$ ein Maximum demnach nicht auf.

2) $H < B$ führt genau im selben Ideengang zu ebenfalls abfälligem Resultate, so dass der Satz wahr erscheint:

„Die Dicke des Ringes der Herpolhodie ist am schmalsten für die Endwerte $H = A$ und $H = C$ nemlich 0, am breitesten für $H = B$, nemlich

$$\sqrt{\frac{(B-A)\,(C-B)}{ABC}}\,.“$$

§ 7. Die Grenzkreise bei den Hyperboloiden.

Einschaliges Hyperboloid. Die Ausdrücke für die Radien lauten

für $H > B$

$$\left.\begin{aligned} V_g &= \sqrt{\frac{(H-A)\,(H+C)}{ACH}} \\ V_k &= \sqrt{\frac{(H-B)\,(H+C)}{BCH}} \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

für $H < B$

$$\left.\begin{aligned} V_g &= \sqrt{\frac{(H-A)\,(H+C)}{ACH}} \\ V_k &= \sqrt{\frac{(H-A)\,(B-H)}{ABH}} \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Für $H = A$ fangen wieder V_g, V_k beide von 0 an, V_g wächst mit zunehmendem H ständig und wird für $H = \infty$ unendlich gross, V_k dagegen erreicht wie beim Ellipsoid für $H = \sqrt{AB}$ das Maximum $V_k = \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}$, dessen es im Intervalle A bis B fähig ist, für $H = B$ die Null und steigt für grösser werdende H ebenfalls bis zum Werte ∞. Als charakteristische Werte für H sind demnach hier nur

$$H = A\,,\ H = \sqrt{AB}\,,\ H = B\,,\ H = \infty \text{ zu verzeichnen.}$$

Die Differenz $V_g - V_k$ ist für $H = A$ 0, für wachsende H, solange sie $< B$ bleiben, ebenfalls wachsend; für $H > B$

dagegen kann ein Minimalwert von $V_g - V_k$ eintreten und bestimmt sich das betreffende H aus der Gleichung

$$H^4 - H^3 (A + B) - 2H . ABC - ABC^2 = 0$$

Doch ist die notwendige Bedingung, die dabei H erfüllen muss,

$$H > A + B.$$

Zweischaliges Hyperboloid. Ausser der Zeichenänderung von B und C ist bei der Uebertragung vom Ellipsoid noch auf den Umstand zu achten, dass V_g und V_k ihre Rolle tauschen, dass

$$V_g = \sqrt{\frac{(H-A)\,(H+B)}{ABH}}, \quad V_k = \sqrt{\frac{(H-A)\,(H+C)}{ACH}} \quad (4'')$$

Für $H = A$ werden die beiden Werte übereinstimmend 0, für $H = \infty$ unendlich gross; ganz ebenso macht es die Breite $V_g - V_k$ des Herpolhodieringes.

§ 8. Die Herpolhodie besonderer Flächen.

Für die im § 4 erwähnten besonderen Flächen zweiten Grades erleidet die genannte Kurve Modifikationen, die teilweise selbst sehr interessant sind, teilweise auch die allmählich stattfindenden Uebergänge deutlich sehen lassen.

1. Im Falle des Cylinders wird

$$V_g = \infty, \quad V_k = \sqrt{\frac{(H-B)\,(C-H)}{BCH}}.$$

Die Herpolhodie erstreckt sich von der Berührung mit dem kleineren Grenzkreis bis ins Unendliche, kehrt wieder tangierend zurück, um nun das Spiel von neuem zu beginnen: sie wird mit anderen Worten von sämtlichen Eingehüllten des mit V_k beschriebenen Kreises gebildet — eine Deutung, die dem einfachen Drehen des Cylinders um die invariable Achse durchaus angepasst ist.

2. 3. Im Falle beider Typen von Rotationsflächen fallen V_g und V_k zusammen, die Breite $V_g - V_k$ ist Null, die Herpolhodie schlängelt sich also zwischen 2 unendlich benachbarten Kreisen oder ist, wenn man will, in einen Kreis übergegangen.

4. Bei der Kugel sind beide Radien durchweg O, die Herpolhodie also auf 1 Punkt zusammengeschrumpft.

5. Der interessante Fall der unendlich dünnen elliptischen oder hyperbolischen Platte liefert

$$V_g = \sqrt{\frac{H-A}{AH}}, \qquad V_k = \sqrt{\frac{(H-A)\,(B-H)}{ABH}},$$

als Herpolhodie aber wesentlich die allgemeine Form derselben, wie sie bei der allgemeinen Fläche zweiten Grades zum Vorschein kommt. In der That lässt sich das Oscillieren der Platte ganz gut mit diesen Vorstellungen vereinbaren: die Platte dreht eben wenn die Randkurve mit dem äussersten möglichen Punkt auf der invariablen Ebene aufliegt, um und kommt die Randkurve in entgegengesetzter Richtung wie vorher zum Rollen.

Differential- und Integralgleichungen der Polkurven.

Die Gleichung der Herpolhodie kann aus den bereits bekannten Eigenschaften beider Polkurven entwickelt werden. Es ist, wenn x', y', z' einen Punkt der Polhodie markiert, das Bogenelement letzterer Kurve $ds = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$, also unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Coordinaten vom Radiusvector U, eine Funktion von U und dU.*) Aus der Thatsache des Rollens folgt augenscheinlich, dass das Bogenelement $d\sigma$ der Herpolhodie immer dem der Polhodie gleich ist, dass sonach $d\sigma$ nur von U und dU oder auch, wenn der Radiusvector der Herpolhodie — gerechnet vom Schnittpunkt M der invariablen Ebene und Linie bis zu einem Punkt der Kurve — mit V bezeichnet wird, $d\sigma$ von V und dV abhängig ist, indem $V = \sqrt{U^2 + \frac{1}{H}}$. Integriert man nach V, so kennt man eine Gleichung zwischen dem Bogen und dem Radiusvector der Kurve, also eine Gleichung der Kurve, welche zu ihrer Bestimmung ausreichen würde. Statt dieser ungewöhnlichen Darstellungsweise führen wir Polarcoordi-

*) P. II. S. 113.

naten ein, indem wir als Anfangslage der kreiselnden Fläche jene wählen, bei welcher diese mit dem Maximalradius $U = \beta$, etwa nach rechtshin, auf der invariablen Ebene aufliegt, als Polarachse die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Durchstosspunkt M der invariablen Linie, als Pol den letzteren Punkt. Bezeichnet Φ den Polarwinkel, so ist $do^2 = dV^2 + V^2\, d\Phi^2$ und stellt diese Gleichung eine Beziehung der zwischen V, dV, $d\Phi$. Integriert man, so ergibt sich eine Gleichung in V und Φ d. h. die Polargleichung der Kurve. Die so vollzogene Darstellungsweise hat den Vorteil, ganz allgemein zu sein; nur führt sie auf ziemlich schwer discutierbare elliptische Integrale 3. Gattung, so dass wir besser V und Φ separat durch einen Parameter u ausdrücken und als solchen eine mit der Zeit t zusammenhängende Grösse wählen. Zur Einführung der letzteren bedürfen wir aber der Mechanik: nach Poinsot's umfassender Arbeit ist die Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt identisch mit dem Rollen eines Ellipsoids, dessen Halbachsen proportional $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$ d. h. umgekehrt proportional den Quadratwurzeln der Hauptträgheitsmomente A, B, C des Körpers im betreffenden festen Punkt sind, dessen Mittelpunkt ferner mit dem letzteren gleichbedeutend ist. Nehmen wir den Proportionalitätsfactor, in den die Masse des Körpers eingehen wird, als 1, so hat das nunmehrige „Centralellipsoid" eine spezifisch mechanische Bedeutung; der Abstand h der invariablen Tangentialebene vom Mittelpunkt des Ellipsoids ist abhängig vom afficierenden Kräftepaar, das die Drehung hervorruft und dessen Ebene die invariable Ebene ist; er ist bei uns mit $\frac{1}{\sqrt{H}}$ bezeichnet worden.

Zur wirklichen Einführung der Zeit t müssten wir nun genau dem Gange Poinsot's folgen, da wir aber dessen théorie nouvelle als völlig bekannt voraussetzen, weiterhin aber mehr die geometrischen Resultate als die mechanischen uns hier interessieren, so erlauben wir uns einfach, jene 2 oder 3 Formeln, deren wir bedürfen, dem Werke Poinsot's zu entlehnen.

Freilich gelten die Untersuchungen Poinsot's nur für ein

Centralellipsoid, welches sich von einem beliebigen durch die für es geltende Ungleichung $C < A + B$*) unterscheidet; gerade so aber, wie sich aus den Gleichungen für V und Φ der Herpolhodie beim Centralellipsoid durch Elimination des von der Zeit abhängigen Parameters u die auf anderm Wege abgeleitete Polargleichung zwischen V und Φ wieder stellt, ganz ebenso thut sie es bei einer beliebigen der eigentlichen Mittelpunktsflächen 2. Grades, so dass also auch bei diesen V und Φ, in analogen Funktionen von u ausgedrückt, ihre Berechtigung haben.

§ 9. Die Radienvectoren U, V ausgedrückt durch die Zeit t.

Poinsot**) findet zwischen dt und dU folgenden Zusammenhang: $\frac{dt}{dU} = \frac{G \cdot U}{\sqrt{(U^2 - \alpha^2)(\beta^2 - U^2)(U^2 - \gamma^2)}}$, wo α, β, γ die in § 3, Formel (1), bezeichneten Grössen bedeuten, G aber den Radiusvector bedeutet, für welchen im ersten Moment der Drehung die Winkelgeschwindigkeit um ihn der Einheit gleich ist. (Poinsot bezeichnet ihn mit k und findet, dass allgemein die Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung proportional der Länge des Radiusvector U ausgedrückt ist durch $\frac{U}{k}$. Siehe P. II. S. 84).

Durch Integration folgt

$$t - t_0 = \frac{G}{2} \int_{\beta}^{u} \frac{d(U^2)}{\sqrt{(U^2 - \alpha^2)(\beta^2 - U^2)(U^2 - \gamma^2)}},$$ wo t_0 Anfangszeit ist, für welche $U = \beta$.

*) Ist nemlich der rotierende beliebige Körper unendlich dünn d. h. eine Platte, so ist das Trägheitsmoment C um eine Achse $1 \perp$ dieser Platte gleich der Summe jener um 2 rechtwinkelige Achsen in der Ebene der Platte selbst, ausserdem aber stets kleiner. Die Bedingung des Centralellipsoids, dass A, B, C ein Dreieck zu construieren stets erlauben müssen, wird bei Poinsot elegant repräsentiert (P. II. pp. 104, 105). Die Begründung $C < A + B$ auch bei Sylvester. (Phil Trans. of etc. London s. früher).

**) P. III. S. 293.

Vorstehendes Integral ist ein elliptisches Integral 1. Gattung, wenigstens kann es durch die Substitution $U^2 = U'$ dazu gebracht werden; um ihm die Legendre'sche Normalform zu erteilen, ist eine Unterscheidung der Fälle $H \gtrless B$ notwendig; es ist bekanntlich

für $H > B \quad \gamma < \alpha < \beta$, für $H < B \quad \alpha < \gamma < \beta$

und wird in Rücksicht darauf das obige Integral normiert, wenn man setzt

für $H > B \quad U^2 = \beta^2 - \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{Y^2}$ oder $Y^2 = \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 - U^2}$,

für $H < B \quad U^2 = \beta^2 - \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{Y^2}$ oder $Y^2 = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - U^2}$.

Der Beweis folgt unmittelbar durch Ausführung der Substitutionen und werden die Moduln der elliptischen Integrale

$$\text{für } H > B \quad k = \sqrt{\frac{(B-A)\,(C-H)}{(C-B)\,(H-A)}} \;, < 1,$$

$$\text{aus } k = \sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}} \;, \quad (6)$$

$$\text{für } H < B \quad \lambda = \sqrt{\frac{(C-B)\,(H-A)}{(B-A)\,(C-H)}} \;, < 1,$$

$$\text{aus } \lambda = \sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2-\alpha^2}} \;. \quad (6a)$$

Darnach erhält das obige Integral 2 Formen, welche aber in einander durch Vertauschung von α und γ d. h. von A und C übergehen.

Wir bemerken, dass wir die Untersuchung direct für den Fall $H > B$, also auch in den dafür geltenden Constanten führen werden, weil derselbe unmittelbar aus der bisherigen Festsetzung über unsere Mittelpunktsflächen, die stets $\frac{1}{\sqrt{A}}$ zur grössten Achse hatten, entspringt; auf ihn beziehen sich demnach die oberen der später auftretenden Zeichen, während die unteren für $H < B$, nachdem C und A ihre Rolle in den Formeln getauscht haben, giltig sind.

Jacobi subsumiert in seinem citierten Werke die beiden Fälle stets unter derselben Formel, indem er die Unterscheidungen trifft $A > B > C \quad H < B$

$C > B > A \quad H > B$.

Kehren wir nun zur Normierung des Integrals zurück, so wird durch Anwendung der Substitution $U^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{Y^2}$ erhalten

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{G}(t - t_0) = \int_{\infty}^{y} \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}} =$$

$$\int_{0}^{y} \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 y^2)}} - i K',$$

das letztere nach bekanntem Satze der elliptischen Funktionen; K' ist dabei die Modulfunction des Moduls k', jene des Moduls $k = \sqrt{1 - k'^2}$ dagegen K.

Setzt man nun $\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{G} = \frac{1}{G}\frac{(C - B)(H - A)}{ABC} = n$ (7),

$n(t - t_0) = u$ (8), so kommt

$u + iK' = \int_{0}^{y} \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}}$ und durch Inversion

$Y = \sin \mathrm{am}\,(u + iK')^{*} = \frac{1}{k \sin \mathrm{am}\, u}$ welcher Wert von Y in die Relation $U^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{Y^2}$ eingesetzt

$$U^2 - \gamma^2 = (\beta^2 - \gamma^2) \cdot \Delta^2 \mathrm{am}\, u \qquad (9)$$

liefert.

Hiedurch ist der Radiusvector durch u, unmittelbar also durch die Zeit t ausgedrückt; er ist periodisch und erlangt stets denselben Wert für u, $2K - u$, $2K + u$, $4K + u$ &c. als Parameterwerte, sein Maximum β für $u = 0$, $u = 2K \ldots$, sein Minimum γ für $u = K$, $u = 3K \ldots$.

*) Fundamenta nova S. 35.

Der Radiusvector der Herpolhodie ist durch

$$V^2 = U^2 - \frac{1}{H} = \beta^2 - \frac{1}{H} - (\beta^2 - \gamma^2)\ k^2 \sin^2 \mathrm{am}\ u$$

gegeben und nimmt durch Einsetzen der Werte für β, γ aus (1) die Form an

$$V^2 = \frac{(C-B)\ (H-A)}{ABC} \left[\frac{(C-H)\ B}{(C-B)\ H} - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\ u \right] ,$$

in welche man, um später V bequem durch elliptische Transcendente ausdrücken zu können, einsetzt*)

$$\frac{(C-H)\ B}{(C-B)\ H} = \frac{\Delta^2 \mathrm{am\,ia}}{\cos^2 \mathrm{am\,ia}} , \qquad (10)$$

wodurch

$$V^2 = \frac{G^2 n^2}{\cos^2 \mathrm{am\ ia}} \left[\Delta^2 \mathrm{am\,ia} - k^2 \cos^2 \mathrm{am\,ia} \sin^2 \mathrm{am}\ u \right] \quad (11)$$

Mittels der bekannten Formeln

$$\sin \mathrm{am}\ u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{Hu}{\Theta u} , \quad \cos \mathrm{am}\ u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H_1 u}{\Theta u} ,$$

$$\Delta \mathrm{am}\ u = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta_1 u}{\Theta u} ,$$

$$\frac{\Theta^2 u\, \Theta_1{}^2 \mathrm{ia} - H^2 u\, H_1{}^2 \mathrm{ia}}{\Theta^2{}_0} = \Theta_1 (u - \mathrm{ia})\ \Theta_1 (u + \mathrm{ia}) , \text{**})$$

$$\frac{\Theta^2 u\, \Theta^2 \mathrm{ia} - H^2 u\, H^2 \mathrm{ia}}{\Theta^2{}_0} = \Theta (u - \mathrm{ia})\ \Theta (u + \mathrm{ia})$$

schreibt sich

$$V^2 = G^2 f^2 \cdot \frac{\Theta_1 (u + \mathrm{ia}) \cdot \Theta_1 (u - \mathrm{ia})}{H_1{}^2 \mathrm{ia}\ \Theta^2 u} \quad (12), \text{ wo}$$

$f = n \sqrt{k} \cdot \Theta_0$ (13) bedeutet.

Von den beiden für V aufgestellten Formen ist die in (11) gegebene die leichter diskutierbare; sie zeigt, dass V von $u = 0$ bis $u = K$ abnimmt, von $u = K$ bis $u = 2K$ wieder wächst u. s. w. Für $u = 0$, $u = 2K$, ... $u = 2mK$ werden die Maxima

$V_g = Gn \cdot \frac{\Delta \mathrm{am\ ia}}{\cos \mathrm{am\,ia}}$, für $u = K$, $u = 3K$, ... $u = (2m+1)\,K$

*) J. S. 161. (J. bedeutet Jacobi's Arbeit sur la rotation. Die Seitenzahlen beziehen sich auf Op. II.)

**) Fund. nova S. 173 bezw. S. 175.

Die Minima $V_k = Gn \frac{k,}{\cos \mathrm{am}\, ia}$ erreicht. V ist weiter periodisch mit der Periode $2K$ von u und erlangt dieselben Werte für $K - u$ und $K + u$, ist daher nur im Intervalle von $u = 0$ bis $u = K$ zu untersuchen.

Die Form (12) ist die symmetrischere, elegantere Form; in beiden Formen drückt sich auch $U^2 = V^2 + \frac{1}{H}$ aus.

§ 10. Der Polarwinkel der Herpolhodie.

Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit, welche Poinsot für den die Herpolhodie durchlaufenden Drehpol gefunden hat*), sogleich in unseren Constanten schreiben, erhalten wir

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{G\sqrt{H}} + \frac{(H-A)(H-B)(C-H)}{ABCG\sqrt{H^3 V^2}} \qquad (14)$$

Der letzte, mit dem Quadrat des Radiusvector umgekehrt proportionale Teil ist positiv, solange $H > B$, negativ, solange $H < B$, weshalb wir den Satz aussprechen können:

„Der instantane Drehpol und mit ihm die instantane Drehachse bewegen sich am schnellsten in jenen Lagen, in welchen der Radiusvector U der Polhodie das Maximum oder Minimum erreicht, je nachdem der die Z-Achse oder der die X-Achse fassende Keil des Ellipsoids auf der invariablen Ebene rollt.“**)

Ausser $du = n \,.\, dt$ (15) führen wir in $\frac{d\Phi}{dt}$ nun folgende Grössen, wenigstens teilweise ein, welche sich aus der Gleichung (10) ableiten lassen:

---

*) P. III. S. 296.

**) Es sind diese Thatsachen bereits von Walton (On the relation between the angular velocity &c. Quarterly Journ. Bd. XI. S. 1—14) in ähnlicher, aber nicht so präciser und übersichtlicher Weise, als sie durch die Einführung des Centralellipsoids ermöglicht ist, ausgesprochen worden. Die Ableitung zudem erfordert bei ihm eine umständliche Diskussion der eingeführten Constanten und einen grossen Aufwand algebraischer Reductionen, während sie sich aus den Eigenschaften der Herpolhodie ohne weiteres darbietet.

$$\sin^2 \mathrm{am}\, ia = -\frac{C\,(H-A)}{A\,(C-H)} \qquad \Delta^2 \mathrm{am}\, ia = \frac{B\,(C-A)}{A\,(C-B)}$$

$$\cos^2 \mathrm{am}\, ia = \frac{H\,(C-A)}{A\,(C-H)} \qquad k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, ia = -\frac{C\,(B-A)}{A\,(C-B)} \tag{16}$$

$$\mathrm{tg}^2\, \mathrm{am}\, ia = -\frac{C\,(H-A)}{H\,(C-A)} \qquad \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, ia}{k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, ia} = -\frac{B\,(C-A)}{C\,(B-A)}$$

Weiters gelten, wie einfach zu bestätigen, die folgenden Relationen:*)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{H}}{Gn} \cdot \frac{C-A}{AC} &= \mp i \,.\, \mathrm{cotg}\ \mathrm{am}\, ia \,.\, \Delta \mathrm{am}\, ia \\
\frac{\sqrt{H}}{Gn} \cdot \frac{B-A}{AB} &= \mp i \,.\, \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, ia \,.\, \cos \mathrm{am}\, ia}{\Delta \mathrm{am}\, ia} \\
\frac{\sqrt{H}}{Gn} \cdot \frac{C-B}{BC} &= \mp i \,.\, \frac{\mathrm{cotg}\ \mathrm{am}\, ia}{\Delta \mathrm{am}\, ia}
\end{aligned} \tag{17}$$

Multipliziert man die erste und letzte der Gleichungen (17), so kommt

$$\left(\mp \frac{i}{\mathrm{tgam}\, ia}\right) \cdot \left(\mp \frac{i}{\mathrm{tgam}\, ia}\right) = \frac{(C-A)\,(C-B)}{A^2 C^2} \cdot \frac{H}{G^2 n^2}$$

und es folgt daraus, dass $\frac{i}{\mathrm{tg\,am}\, ia}$ positiv zu nehmen im Falle $H > B$, negativ im Falle $H < B$.

Nunmehr schreibt sich die Gleichung für $\frac{d\Phi}{dt}$, indem man zuerst die Gleichungen (16) verwendet, wodurch man das Produkt der 3 linken Seiten von (17) erhält, und schliesslich (17) selbst zu Hilfe nimmt, sowie für V den Wert aus (11) setzt,

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{1}{Gn\sqrt{H}} \mp \frac{k'^2\, \mathrm{tgam}\, ia \,.\, \Delta \mathrm{am}\, ia}{i\,(\Delta^2 \mathrm{am}\, ia - k^2 \cos^2 \mathrm{am}\, ia \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u)} \tag{18}$$

Hieraus wird

$$\Phi = \frac{u}{Gn\sqrt{H}} \mp \int_0^u \frac{k'^2 \,.\, \mathrm{tgam}\, ia \,.\, \Delta \mathrm{am}\, ia \,.\, du}{i\,[\Delta^2 \mathrm{am}\, ia - k^2 \cos^2 \mathrm{am}\, ia \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u]}$$

Bezeichnen wir mit P das letztere Integral und führen eine reelle Amplitude und den Complementärmodul mittels der Relationen**)

*) J. S. 158.

**) Fundamenta nova S. 34.

$$\operatorname{tgam}(\mathrm{i}a, k) = i \sin \operatorname{am}(a, k') \; ; \quad \Delta \operatorname{am}(\mathrm{i}a, k) = \frac{\Delta \operatorname{am}(a, k')}{\cos \operatorname{am}(a, k')} \; ;$$

$$\cos \operatorname{am}(\mathrm{i}a, k) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}(a, k')}$$

ein, so wird

$$P^* = \int_0^u \frac{k'^2 . \sin \operatorname{am}(a, k') . \cos \operatorname{am}(a, k') . \Delta \operatorname{am}(a, k')}{k'^2 \cos^2 \operatorname{am}(a, k) + k^2 \cos^2 \operatorname{am} u} \, du.$$

Beide Seiten nach u differenziert und nach a integriert liefern

$$\int \frac{dP}{du} \, \partial a = \int \frac{k'^2 \sin \operatorname{am}(a, k') . \cos \operatorname{am}(a, k') . \Delta \operatorname{am}(a, k')}{k'^2 \cos^2 \operatorname{am}(a, k') + k^2 \cos^2 \operatorname{am} u} \, \partial a,$$

$$\int \frac{dP}{du} \, \partial a = -\frac{1}{2} \log \left[k'^2 \cos^2 \operatorname{am}(a, k') + k^2 \cos^2 \operatorname{am} u \right] =$$

$$-\frac{1}{2} \log \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\mathrm{i}a, k) - k^2 \cos^2 \operatorname{am}(\mathrm{i}a, k) \sin^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am}(\mathrm{i}a, k)}$$

In Rücksicht auf die zwischen (11) und (12) befindlichen Relationen wird

$$\int \frac{dP}{du} \, \partial a = \log \frac{\theta u}{\sqrt{k \theta_0}} + \log H_1 \mathrm{i}a - \frac{1}{2} \log \Theta_1(u + \mathrm{i}a) . \Theta_1(u - \mathrm{i}a),$$

also

$$\frac{dP}{du} = \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \mathrm{i}a - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \log \Theta_1(u + \mathrm{i}a) . \Theta_1(u - \mathrm{i}a)$$

$$\frac{dP}{du} = \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \mathrm{i}a - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{du} \log \frac{\Theta_1(u + \mathrm{i}a)}{\Theta_1(u + \mathrm{i}a)} \; ,$$

weil $\frac{\partial}{\partial a} \log \Theta_1(u + \mathrm{i}a) = i . \frac{d}{du} \log \Theta_1(u + \mathrm{i}a)$ und

$\frac{\partial}{\partial a} \log \Theta_1(u - \mathrm{i}a) = -i . \frac{d}{du} \log \Theta_1(u - \mathrm{i}a)$ ist.

Das Integral P wird

$$P = u . \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \mathrm{i}a + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u + \mathrm{i}a)}{\Theta_1(u - \mathrm{i}a)}, \text{ sonach}$$

*) Kommt unter den 16 von Jacobi (J. S. 186–188) gegebenen Integralen vor.

der Polarwinkel der Herpolhodie

$$\Phi = \frac{u}{Gn\sqrt{H}} + u \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \log H_1 \text{ ia} - \frac{1}{2i} \log \frac{\theta_1(u-\text{ia})}{\theta_1(u+\text{ia})} \quad (19)$$

Die Diskussion ergibt für $u = 0$ $\Phi = 0 = \Phi_0$, für wachsende u ein ständiges Wachsen für Φ, für $u = K$ den Wert $\Phi_K = K\left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \log H_1 \text{ ia}\right]$, für $u = 2K$ den Wert $\Phi_{2K} = 2\Phi_K$ etc. Weiter ist

$\Phi_{u+2pK} + \Phi_u + 2p \cdot \Phi_K$ d. h. wenn das Argument um $2pK$ wächst, wächst der Winkel Φ_u um das $2p$ fache des Winkels Φ_K. Die Winkel $\Phi_{K+u} - \Phi_K$ und $\Phi_{K-u} - \Phi_K$ sind einander gleich, sonach der Polarwinkel Φ_u auch nur wieder für solche Werte von u zu untersuchen, die im Intervalle von 0 bis K liegen.

Wir wollen ein Kurvenstück der Herpolhodie von der Berührung mit dem einen Grenzkreis an bis zu der mit dem andern eine „halbe Welle", das Kurvenstück zwischen 2 analogen Berührungen also eine Welle nennen, so ist dieselbe offenbar bekannt, wenn ausser V_g, V_k und dem Winkel der halben Welle, Φ_K, noch die Form bekannt ist, in der sie von einem Grenzkreis zum andern anläuft; Auskunft darüber gibt die

§ 11. Untersuchung auf Wendepunkte.

Die Bedingung für das Auftreten eines Wendepunktes liegt im Unendlichwerden des Krümmungsradius ϱ, diese wieder im Nullwerden des für ϱ auftretenden Nennerwertes

$$V^2 + 2\left(\frac{dV}{d\Phi}\right)^2 - V\left(\frac{d^2V}{d\Phi^2}\right).$$

Die Einführung des Parameters u ergibt

$$V^2\left(\frac{d\Phi}{du}\right)^3 + 2\left(\frac{dV}{du}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\Phi}{du}\right) - V\left(\frac{d^2V}{du^2} \cdot \frac{d\Phi}{du} - \frac{d^2\Phi}{du^2} \cdot \frac{dV}{du}\right) = 0$$

Dabei ist, wenn sn statt sin am, analog cn, Δn geschrieben werden mag,

$$V = \frac{Gn}{\mathrm{cn\,ia}} \sqrt{\Delta\mathrm{n}^2\,\mathrm{ia} - k^2\,\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}\,.\,\mathrm{sn}^2\,u} \overset{*}{=} \frac{Gn}{\mathrm{cn\,ia}} \sqrt{W},$$

$$\frac{dV}{du} = \frac{-\,Gn\,k^2\,\mathrm{cn\,ia}\,.\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{cn}\,u\,.\,\Delta\mathrm{n}\,u}{\sqrt{W}},$$

$$\frac{d^2V}{du^2} = \frac{-\,Gn\,k^2\,\mathrm{cn\,ia}}{\sqrt{W^3}}\,.\,[\Delta\mathrm{n}^2\,\mathrm{ia}\,.\,\mathrm{cn}^2\,u\,.\,\Delta\mathrm{n}^2\,u -$$

$$\mathrm{sn}^2 u\,(\Delta\mathrm{n}^2\,u + k^2\,\mathrm{cn}^2\,u)\,(\Delta\mathrm{n}^2\,\mathrm{ia} - k^2\,\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}\,.\,\mathrm{sn}^2\,u)]$$

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{1}{Gn\sqrt{H}} + \frac{k'^2\,\mathrm{tgn\,ia}\,.\,\Delta\mathrm{n\,ia}}{i\,(\Delta\mathrm{n}^2\,\mathrm{ia} - k^2\,\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}\,.\,\mathrm{sn}^2 u)} = \mathrm{P} + \frac{Q}{W},$$

$$\frac{d^2\Phi}{du^2} = \pm\,\frac{2\,k^2\,\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}\,.\,Q\,.\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\Delta\mathrm{n}\,u}{W^2}\,.$$

Führt man weiter die Abkürzung

$$\sin^2 \mathrm{am}\,u = x \qquad (20)$$

ein, so wird die Bedingungsgleichung zur folgenden

$$(PW+Q)^3 + 2\,k^4\mathrm{cn}^4\,\mathrm{ia}\,.\,PW.\,x\,(1-x)\,(1-k^2x) + k^2\mathrm{cn}^2\mathrm{ia}\,(PW+Q).$$

$$[\Delta\mathrm{n}^2\mathrm{ia}\,(1-x)\,(1-k^2x) - Wx\,(1+k^2-2\,k^2x)\,] = 0$$

Ordnet man unter Berücksichtigung, dass

$$W = \Delta\mathrm{n}^2\,\mathrm{ia} - k^2\,\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}.\,x,$$

so kommt — das Glied mit x^4 fällt fort — nach längerem Rechnen eine in x kubische Gleichung, in welche wieder die Grössen A, B, C, H eingeführt werden mögen:

$$P = \frac{1}{Gn\sqrt{H}} = \sqrt{\frac{ABC}{H\,(H-A)\,(C-B)}}$$

$Q = \mp\,i\,k'^2\,\mathrm{tgn\,ia}\,.\,\Delta\mathrm{n\,ia} = P\,.\,\Delta\mathrm{n}^2\mathrm{ia}\,.\,\frac{H-B}{B}$, mit nur einerlei Zeichen; denn es ergibt sich

im Falle $H > B$ $\quad Q = +\,P\,.\,\Delta\mathrm{n}^2\mathrm{ia}\,.\,\frac{H-B}{B}$,

„ „ $\quad H < B$ $\quad Q = -\,P\Delta\mathrm{n}^2\mathrm{ia}\,.\,\frac{B-H}{B}$

*) Wir führen die Untersuchuug in den Jacobi'schen Constanten durch, um unten wieder A, B, C, H einzuführen, da ein sofortiges Einsetzen dieser Grössen eine zu grosse Ausdehnung der Gleichung zu Folge haben würde.

Durch besagte Einführung in die obige Gleichung nimmt die letztere, für $H > B$, die Gestalt an,

$$x^3\ (B-A^2)\ H^2\ [2H-A-B-C]\ +$$
$$x^2\ (B-A)^2\ H^2\ (H-A)\ [H(A+C-5B)\ +\ 2\ B(A+B+C)]$$
$$-\ x\ (B-A)\ B\ (H-A)^2\ [2H\ (A+C-2B)\ +\ B\ (A+B+C)]$$
$$+\ B^2\ (H-A)^3\ (A-B+C)\ =\ 0$$

und wird noch einfacher durch die Substitutionen

$$z\ =\ \frac{x\ H\ (B-A)}{B\ (H-A)}\ ;$$

$$A+B+C\ =\ s\ ;\ s-2H\ =\ Hp\ ;\ s-2B\ =\ Bq. \quad (22)$$

Es wird nemlich dann die kritische Gleichung

$$pz^3\ -\ (2p+q)\ z^2\ +\ (p+2q)\ z-q\ =\ 0\ , \quad (23)$$

welche die Doppelwurzel $z_1\ =\ z_2\ =\ 1$ besitzt und deren dritte Wurzel $z_3\ =\ \frac{q}{p}$ lautet. Rückwärts eingesetzt wird

$$\sin^2 \mathrm{am}\ u_1\ =\ \sin^2 \mathrm{am}\ u_2\ =\ \frac{B\ (H-A)}{H\ (B-A)}\ ,$$
$$\sin^2 \mathrm{am}\ u_3\ =\ \frac{(H-A)\ (A+C-B)}{(B-A)(A+B+C-2H)}\ ,$$

und es sind u_1, u_2, u_3 jene Parameterwerte, für welche Wendepunkte auftreten. Sollen letztere reell sein, so sind die Ungleichungen

$\frac{B\ (H-A)}{H\ (B-A)} < 1$ und $\frac{(H-A)\ (A+C-B)}{(B-A)(A+B+C-2H)} < 1$ erforderlich.

Es ist nun

$$H > B\ ,\ AH > AB\ ,\ BH\ +\ AH > BH\ +\ AB$$

und daraus $\frac{B\ (H-A)}{H\ (B-A)} > 1$;

$$H > B\ ,\ 2H > 2B\ ,\ 2H\ +\ A\ +\ C\ -\ B > A\ +\ B\ +\ C$$

oder

$A+C-B > A+B+C-2H$ und $H-A > B-A$, sonach

$$\frac{(H-A)\ (A+C-B)}{(B-A)(A+B+C-2H)}\ >\ 1.$$

Die geforderten Bedingnisse sind also nicht erfüllt.

Ist $H < B$, so hat man, um die in diesem Falle giltige Bedingungsgleichung für das Auftreten von Wendepunkten zu

erhalten, in den vorausgehenden Entwicklungen nur A mit C zu vertauschen, was insbesondere auch für die Substitutionen (22) gesagt sein mag. Die Bedingungen lauten

$$\frac{B\,(C-H)}{H\,(C-B)} < 1\ ,\ \frac{(C-H)(A+C-B)}{(C-B)(A+B+C-2H)} < 1\ .$$

Nun ist aber $B > H$, $BC > HC$, $BC + HB > HC + HB$

$$\text{d. h. } \frac{B\,(C-H)}{H\,(C-B)} > 1;$$

der zweite Bruch, auf die Bedingung „< 1“ geprüft, liefert

$$H\,(C-A-B) < B\,(C-A-B)$$

und ist zum Bestehen dieser Ungleichheit unbedingt $C > A + B$ erforderlich.

Wenn also $C > A + B$, treten Wendepunkte auf; der Parameter u_3, für den es zum ersten Mal geschieht, ist gegeben durch die Relation

$$u_3 = \int_0 \frac{\sqrt{\frac{(C-H)\ (A+C-B)}{(C-B)(A+B-2H)}}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)\ (1-k^2x^2)}} \qquad (24)$$

Weiterhin wiederholen sich die Wendepunkte für

$$2K - u_3,\ 2K + u_3,\ 4K - u_3 \ldots .$$

Auf Grund dieser Untersuchungen sprechen wir folgenden Satz aus:

„In der Herpolhodie können niemals Wendepunkte eintreten, wenn dieselbe erzeugt wird durch den kleineren Keil des Ellipsoids d. h. jenen, der die Z-Achse enthält, das Ellipsoid mag gestellt sein, wie immer es will. Ist dagegen der grössere Keil, der um die X-Achse läuft, der rollende, so können Wendepunkte nur dann auftreten, wenn das Ellipsoid nicht Centralellipsoid ist. Bei letzterem sind Wendepunkte ein für allemal ausgeschlossen.“

Für sinam $u = 1$ wird u noch reell nnd tritt der Fall für $H = B$ ein; u als Vielfaches von K aber ist gleichzeitig mit

diesem ∞ d. h. nach unendlich langer Zeit wendet sich erst die Kurve. Eine Interpretation dieses Falles werden wir später geben. Dagegen verdient hier noch die Thatsache Erwähnung:

„Je näher H gegen B geht, je mehr sich also der Abstand von Mittelpunkt des Ellipsoids und invariabler Ebene der Länge der mittleren Halbachse nähert, desto mehr rücken die Wendepunkte der Herpolhodie an das Ende der halben Wellen", (denn wenn H wächst, geht u_3 steigend gegen K. Auch die Krümmungsverhältnisse werden durch diesen Satz klar dargestellt).

Poinsot hat in seinem oft citierten Werke die „Wellen" der Herpolhodie nicht allgemein aufgefasst, sondern sich dieselben in der gewöhnlichen Form, mit Wendepunkten versehen, vorgestellt. (Vgl. seine der théorie nouvelle in Liouv. J. beigegebene Figurentafel.) Auch Chelini hat sich von wesentlich denselben Anschauungen leiten lassen. (Vgl. die Zeichnungen im angeführten Werke).

In den von v. Obermayer neuerdings auf rein experimentellem *) Wege erhaltenen Figuren dagegen erreichen unsere analytisch gewonnenen Sätze über die Herpolhodieformen eine sehr befriedigende Bestätigung. (S. die Figuren v. Obermayer's im Atlas zu Carl's Rep. Bd. XV.)

§ 12. Der Winkel Φ_K einer halben Welle.

Φ_K, zur Kenntnis der Form der Herpolhodie von bestimmender Bedeutung, war durch die Gleichung definiert:

$$\Phi_K = K \left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} \pm \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \, \mathrm{ia} \right].$$

Nun ist $H_1 \, \mathrm{ia} = \Theta \mathrm{ia} \, . \, \mathrm{cos\,am\,ia} \, . \sqrt{\frac{k}{k'}}$,

also $\frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \, \mathrm{ia} = i \, . \, \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \, \mathrm{ia} = i \left\{ \frac{\partial}{\partial (\mathrm{ia})} \log \Theta \, \mathrm{ia} - \frac{\sin \mathrm{am\,ia} \, . \, \Delta \mathrm{am\,ia}}{\cos \mathrm{am\,ia}} \right\} = {}^{**} i \left\{ Z \mathrm{ia} - \mathrm{tg\,am\,ia} \, . \, \Delta \mathrm{am\,ia} \right\}$

*) S. hierüber Mach (Carl's Rep. der Exp.-Ph. Bd. IV. S. 361).
**) Fund. nov. S. 145.

Bedeutet weiter $E\,\mathrm{ia}$ das Legendre'sche Integral zweiter Gattung, so ist

$$Z(\mathrm{ia}) = E(\mathrm{ia}) - \frac{\mathrm{ia}\,.\,E_{(K)}}{K}\ ^{*},$$

also wird zunächst

$$\Phi_K = K\left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} \mp i\ E(\mathrm{ia}) \pm \frac{a\,.\,E_{(K)}}{K} \mp i\,.\,\mathrm{tg\,am\,ia}\,.\,\Delta\mathrm{am\,ia}\right].$$

Dieser Ausdruck ist einer weiteren Umgestaltung fähig, wenn die reelle Amplitude eingeführt wird, wozu die Relationen dienen: $E(\mathrm{ia}, k) = i\,.\,\mathrm{tg\,am}\,(a, k')\,.\,\Delta\mathrm{am}\,(a, k') - iE(a, k') + \mathrm{ia}$,** $-i\,.\,\mathrm{tg\,am}\,(\mathrm{ia}, k)\,.\,\Delta\mathrm{am}\,(\mathrm{ia}, k) = \mathrm{tg\,am}\,(a, k')\,.\,\Delta\mathrm{am}\,(a, k')$ ***

Er wird schliesslich

$$\Phi_K = K\left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} + E(a, k') + \frac{a\,(K - E_K)}{K}\right] \quad (25)$$

Dabei gelten die oberen Zeichen für $H > B$, die unteren für $H < B$ und E_K oder einfach E ist

$$\int_0^K \Delta^2\,\mathrm{am}\,u\,.\,du\,.$$

Bei gegebenem Ellipsoid ist Φ_K eine Funktion von H, wovon jede in Φ_K eingehende Grösse abhängig ist. Die Art dieser Abhängigkeit, die über die Veränderung der betreffenden Grösse gleichzeitig mit H Aufschluss gibt, soll nun kurz untersucht werden und verfolgen wir nebenbei den Zweck, den Modul k und die andern nach dem Beispiele Jacobi's eingeführten Grössen geometrisch zu deuten.

1) k, k', K, E, K'.

Nach Formel (6) war

$$k = \sqrt{\frac{(B-A)\,(C-H)}{(C-B)\,(H-A)}} = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \gamma^2}}$$

Bezeichnen wir aber den in der XZ Ebene gelegenen Anfangspunkt der Polhodie mit ξ, η, ζ, so ist, da $U = \beta$, nach Formel (3) ausser $\eta = 0$

*) Fundamenta nova S. 133.
**) Fund. nova S. 162.
***) Fund. nova S. 34.

$$\xi^2 = \frac{BC}{(B-A)(C-A)}(\beta^2-\alpha^2) \quad ; \quad \zeta^2 = \frac{AB}{(C-A)(C-B)}(\beta^2-\gamma^2)$$

$$k = \frac{\xi}{\zeta} \cdot \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}$$

Bezeichnet nun ψ den Neigungswinkel, den der Anfangsradius $U = \beta$ nach dem Punkte ξ, η, ζ mit der X-Achse bildet, ψ_0 den gleichen Neigungswinkel des Maximalradius im speziellen Falle $H = B$, so ist (s. § 1).

$$k = \frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}\psi} \cdot$$

oder, wenn man die zur selben Abscisse zugehörigen Ordinaten mit ζ_0, ζ bezeichnet,

$k = \frac{\zeta_0}{\zeta}$ im Falle $H > B$, analog $k = \frac{\zeta}{\zeta_0}$ im Falle $H < B$.

Durch diese geometrische Repräsentation ist aber die Veränderung die k bei Veränderung von H erleidet, unmittelbar ersichtlich:

„Im Falle $H = A$ 0 werdend steigt k für wachsende H, wird für $H = B$ 1, fällt wieder für weiter wachsende H, bis es in $H = C$ wieder 0 geworden ist."

k' verhält sich natürlich umgekehrt, K und K' steigen und fallen mit k und k', werden für $H = A$, $H = C$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ und ∞, für $H = B$ ∞ und $\frac{\pi}{2}$; E fällt mit wachsenden k, wird für $k = 0$ $\frac{\pi}{2}$, für $k = 1$ ebenfalls 1.

2. $\operatorname{sin\,am}(a, k')$, a, $E(a, k')$.

Die Amplitude a berechnet man aus

$$\operatorname{sin\,am}(a, k') = i \cdot \operatorname{tg\,am}(ia, k) = \pm\sqrt{\frac{C(H-A)}{H(C-A)}}$$

Bezeichnet man nun die vom Scheitelpunkt der grossen Achse $\frac{1}{\sqrt{A}}$ des Ellipsoids an die mit dem Abstande $\frac{1}{\sqrt{H}}$ beschriebene Kugel gezogene Tangente mit t, die an die mit der kleinen Halbachse $\frac{1}{\sqrt{C}}$ beschriebene Kugel gelegte mit t_1, so findet sich leicht (absolut) für $H > B$ $\operatorname{sin\,am}(a, k') = \frac{t}{t_1}$;

Beschreibt man dagegen die Kugel mit der grösseren Halbachse $\frac{1}{\sqrt{A}}$ und zieht im Endpunkte der kleinsten Achse eine Tangente, welche von den Kugeln $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{H}}$ geschnitten wird, so ist, wenn mit t_2, t die vom Scheitelpunkt und den Schnittpunkten begrenzten Stücke bezeichnet werden, im Falle $H < B$ (absolut)

$$\text{sinam}\,(a, k') = \frac{t}{t_2}\ ;$$

(Es ist für $H < B$ $\text{sinam}\,(a, k') = -\sqrt{\frac{A\,(C-H)}{H\,(C-A)}}$,

weil C mit A zu vertauschen ist, wenn man nicht von $C > B > A$ abgehen will).

Auch hier ist die Veränderung mit H augenscheinlich:

„sinam (a, k') wird für $H = C$ 1, für fallende H stets kleiner, bis es für $H = B$ den Wert

$$\text{sinam}\,(a, k') = +\sqrt{\frac{C\,(B-A)}{B\,(C-A)}}$$

annimmt; ähnlich wird die Funktion für $H = A$ 1 und steigt mit fallendem H, wo also H immer $< B$, bis es für $H = B$

$$\text{sinam}\,(a, k') = -\sqrt{\frac{A\,(C-B)}{B\,(C-A)}} \quad \text{wird.“} —$$

Dass die Uebergangswerte von a für $H = B$ identisch sind, beweist sich leicht:

Ist der erste Wert für $H = B$ von
$\text{sinam}\,(a, k') = x_0$, so ist
der zweite Wert für $H = B$ von
$\text{sinam}\,(a, k') = -\sqrt{1-x_0^2}$

und im ersten Falle $a = \int_{y=0}^{y=x_0} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\ (1-k'^2y^2)}}$,

im zweiten $a = \int_{y=0}^{y=-\sqrt{1-x_0^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\ (1-k'^2y^2)}}$.

Die Integale sind aber wirklich einander gleich, wenn die Substitution $y = -\sqrt{1-x_0^2}$ etwa ins erste ausgeführt wird; k' ist dabei 0 d. h. „die Grösse a wird für $H = A$ und $H = C$ beidemal $K' = \infty$; von beiden Endwerten gegen $H = B$ fällt sie, für $H = B$ wird

$$a = \int_0 \sqrt{\frac{C\ (B-A)}{B\ (C-A)}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \arcsin \sqrt{\frac{C\ (B-A)}{B\ (C-A)}} .“$$

„$E(a,k')$ kann, da es mit a wächst, mit wachsendem k' aber fällt, zu- oder abnehmen mit steigendem H.“

3. $\frac{1}{GnV\overline{H}}$

„Im Falle $H > B$ ist $\frac{1}{GnV\overline{H}} = \sqrt{\frac{A\,B\,C}{H\,(H-A)\,(C-B)}}$ am grössten für $H = B$, abnehmend mit wachsendem H, am kleinsten für $H = C$; im Falle des Centralellipsoids auch stets grösser als 1.

Ist $H < B$, so ist $\frac{1}{GnV\overline{H}} = \sqrt{\frac{A\,B\,C}{H\,(C-H)\,(B-A)}}$ ein Maximum für $H = \frac{C}{2}$ und wird von da ab gegen $H = A$ und $H = B$ wieder kleiner und zwar ist der Wert für $H = A$ kleiner oder grösser als der für $H = B$ erlangte, je nachdem wir ein Centralellipsoid haben oder nicht; im ersteren Falle ist auch $\frac{1}{GnV\overline{H}}$ stets > 1.“

Die geometrische Repräsentation liefert nichts Uebersichtiches.

Es verdient nun bemerkt zu werden, dass der halbe Wellenwinkel Φ_K für $H = B$ unendlich wird und dass er für die andern Grenzwerte $H = A$, $H = C$ die ganz bestimmten Werte

$$\Phi_K = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{GnV\overline{H}} + 1\right], \text{ respective } \Phi_K = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{GnV\overline{H}} - 1\right] \quad (26)$$

annimmt, obgleich die Herpolhodie auf 1 Punkt zusammengeschrumpft ist.

§ 13. Ueber den Schluss der Herpolhodiewellen.

Im allgemeinen wird die Herpolhodie sich niemals schliessen, sondern es werden die Wellen sich bis ins Unendliche innerhalb der Grenzkreise schlingen, ohne jemals in einen früheren Zug einzugreifen. Schluss ist natürlich nur dann möglich, wenn Φ_K mit π rational ist und kann man nach jenem Werte von H sich fragen d. h. nach jenem Abstande der invariablen Ebene vom Mittelpunkte des Ellipsoids, welcher eine bestimmte geschlossene Kurvenform erzeugt. Setzt man aber in der Gleichung für Φ_K das letztere $= \mu\pi$, wo μ rational, so ist die Grösse H, der transcendenten Funktionen K, E, a, $E(a,k')$ der rechten Seite wegen, in welche a und k, k' als Funktionen von H eingehen, nicht explicite, sondern höchstens mittels Näherungsmethoden und da nur höchst mühsam zu finden.

Aus diesem Grunde werden wir auf diese Weise auch keinen Schluss hervorzubringen trachten, sondern wir nehmen k und ia oder a als gegeben an, A, B, C, H aber als noch willkürlich; hiedurch erreichen wir, dass die sämtlichen der genannten complicierten Funktionen $K \ldots$ Constante werden, in der Gleichung

$$\frac{\mu\pi}{K} = \frac{1}{Gn\sqrt{H}} \pm \left[E(a,k') - \frac{a}{K}(K-E) \right]$$

also nur das Glied $\frac{1}{Gn\sqrt{H}}$ variabel ist. In demselben kommen alle 4 der Constanten A, B, C, H vor, da aber k und a constant, können wir zwei, im Falle $H > B$ etwa B und C, durch die andern, H und A, ausdrücken:

$$C = \frac{AH \cdot \sin^2 \mathrm{am\,ia}}{H - A \cdot \cos^2 \mathrm{am\,ia}}, \qquad B = \frac{AH \cdot A^2 \mathrm{am\,ia}}{Hk'^2 + Ak^2 \cos^2 \mathrm{am\,ia}}$$

Wählen wir weiter noch A beliebig, so ist also in der Gleichung für $\frac{\mu\pi}{K}$ nur noch H unbekannt und kann somit, sowie rückwärts B und C, bestimmt werden.

Geometrisch heisst das nichts anderes als: statt bei gegebenem Ellipsoid den Abstand $\frac{1}{\sqrt{H}}$ der invariablen Ebene zu variieren und jenen zu suchen, für welchen $\Phi_K = \mu\pi$ wird, deformieren

wir gleichzeitig das Ellipsoid und variieren den Abstand $\frac{1}{\sqrt{H}}$. Natürlich empfiehlt es sich, solche Werte von μ zu nehmen, welche $\mu\pi$ sehr nahe an einen bereits berechneten Wert von Φ_K bringen; es wird hiedurch die Deformation sehr gering ausfallen. k und a werden natürlich am besten als übereinstimmend mit den für einen solchen berechneten Winkel giltigen k und a angenommen werden müssen.

Führt man die oben angegebenen Werte von B und C in $\frac{1}{Gn\sqrt{H}}$ ein, so ergibt sich als gesuchter Wert für das reciproke Quadrat des Abstandes

$$H = A - \frac{\mu\pi}{K} - \left(E\,a\,k') - \frac{\mathrm{a}\,(K-E)}{K}\right)$$

Eine übereinstimmende Betrachtung kann auch für den Fall $H < B$ gemacht werden, wenn man etwa A und B durch H und C ausdrückt und das untere Zeichen in der für $\frac{\mu\pi}{K}$ giltigen Gleichung nimmt.

§ 14. Weitere Eigenschaften der Herpolhodie.

Wie bei jeder Kurve kann man auch bei dieser nach dem Krümmungsradius in einem Punkte, nach dem beschriebenen Bogen u. dgl. forschen. Besonderes Interesse gewährt hier der Flächensector S, der von dem Radiusvector V der Herpolhodie überstrichen wird. Es ist nach (18)

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{1}{Gn\sqrt{H}} \pm \frac{G^2 n^2 k'^2 \operatorname{sn}\mathrm{am}\,\mathrm{ia}\;\Delta\mathrm{am}\,\mathrm{ia}}{i\cos^3\mathrm{am}\,\mathrm{ia}\cdot V^2},$$

also

$$2S = \int_0^u V^2\,d\Phi = \pm \frac{G^2 n^2 k'^2 \operatorname{sn}\mathrm{ia}\cdot\Delta\mathrm{ia}}{i\,\mathrm{cn}^3\,\mathrm{ia}}\cdot u + \frac{1}{Gn\sqrt{H}}\int_0^u V^2\,du$$

$$2S = \pm \frac{G^2 n^2 k'^2 \operatorname{sn}\mathrm{ia}\,\Delta\mathrm{ia}}{i\,\mathrm{cn}^3\,\mathrm{ia}}\cdot u + \frac{Gn}{\sqrt{H}}\left[\frac{\Delta\mathrm{n}^2\mathrm{ia} - \mathrm{cn}^2\mathrm{ia}}{\mathrm{cn}^2\mathrm{ia}}\cdot u + E_u\right]$$

$$\frac{2S\sqrt{H}}{Gn} = E_u \pm \frac{u}{\mathrm{cn}^2\,\mathrm{ia}}\left[\frac{H-B}{C-B} + \frac{B}{C-B} - \frac{H}{C-H}\right] = E_u - u\cdot\frac{H-B}{C-B}$$

Die Sectorfläche*) wird

$$S = \frac{Gn}{2\sqrt{H}} \left[E_u - u \cdot \frac{H-B}{C-B} \right] \quad (28)$$

Dieselbe besteht aus einem mit der Zeit proportionalen und einem mit ihr periodischen Glied; setzt man

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{d\psi}{du} + \frac{1}{Gn\sqrt{H}} \quad \text{oder} \quad \Phi = \psi + \frac{u}{Gn\sqrt{H}} \quad \text{d. h.}$$

erteilt man der Polarachse im Sinne der anfangs erfolgten Rotation eine gleichförmige Rotation in der Ebene der Herpolhodie mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{Gn\sqrt{H}}$, so ist der Flächensector zwischen der neuen Polarachse und dem Radiusvector V

$$S' = \pm \frac{G^2 n^2 k'^2 \sin\mathrm{am}\, ia \,.\, \Delta\mathrm{am}\, ia}{i \cos^3 \mathrm{am}\, ia} u, \quad (29)$$

d. h. stets mit u oder mit der zurückgelegten Zeit proportional.

Die Ausdrücke für den Kurvenbogen σ und den Krümmungsradius ϱ aufzustellen bietet, da sich einfachere Resultate nicht ergeben, wenig Aussicht auf das Auftreten besonders charakteristischer Eigenschaften.

Auch Siacci, dem das letzte Citat Hermite's**) entnommen ist, lässt es bei der Anstellung des Bogenelements und der Anführung des Krümmungshalbmessers bewenden.

§ 15. Die Spirale für $H = B$.***

Für $H = B$ wird $\quad V = G'n' \cdot \cos\mathrm{am}\, u$

$$\Phi = \frac{1}{G'n'\sqrt{B}} \cdot u \ ,$$

wo $G'n'$ die frühere Grösse Gn bedeutet, darin $H = B$ gesetzt.

Da $k' = 1$ ist, $\sin\mathrm{am}\, u = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2}$, so ist

$$u = \int_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2}},$$

*) Vergl. Hermite: sur quelques applications des fonctions elliptiques. (Comptes vendus. J. 1878. p. 276.)

**) Siehe dieses.

***) P. II. S. 116—119.

$$\text{also } 2u = 2\Phi . G'n' \sqrt{B} = \log \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{G'n'}\right)^2}}$$

und hieraus

$$V = \frac{2 G' n'}{\frac{\Phi}{c} . G'n' \sqrt{B} - \Phi . G'n' \sqrt{B}} \quad (30)$$

Dies ist die Gleichung einer Spirale; für $\Phi = 0$ wird V am grössten, $V_g = 2 G'n'$, für $\Phi = \infty$ wird V 0 d. h. der Pol des Polarcoordinatensystems, auf welches die Spirale bezogen, ist ein asymptotischer Punkt*) derselben, wie bereits aus andern Eigenschaften bekannt ist . . . Fig. VIII.

Durch Aenderung von Φ in $-\Phi$ ändert sich die Gleichung gar nicht, die Spirale ist also eine Doppelspirale, symmetrisch durch die Polarachse geteilt; in der That ist ja die Polhodie, deren Abrollen die Herpolhodie erzeugt, hier eine Ellipse und erzeugt nur deren eine Hälfte die einfache Spirale.

Der Bogen der Spirale ist einem entsprechenden der Ellips gleich, wird also durch ein Legendre'sches Integral II. Gattu ausgedrückt; berechnet man die Länge der halben Spirale, so dieselbe endlich und einer Halbellipse gleich.

Der Flächensector wird

$$S = \frac{G'n'}{2\sqrt{B}} . Eu \quad (31),$$

wo u von 0 bis K zu rechnen ist, also jener der halben S ale, da $E = 1$,

$$S_K = \frac{G'n'}{2\sqrt{B}} = \frac{1}{2B} \cdot \sqrt{\frac{(B-A)(C-B)}{AC}} = \frac{V_g}{4\sqrt{B}} \quad (3'$$

Das letztere Resultat sagt:

---

*) Poinsot (II. S. 118) lässt den Namen „asympt ischer Punkt" nicht gelten, weil die Spirale gegen ihn nicht ie gegen einen unendlich kleinen Kreis anläuft, also schliesslich ngente an dieselbe und Radiusvector nicht senkrecht stehen.

„Die ganze Fläche, welche von der Spirale und der Polarachse begrenzt ist, ist an Inhalt einem Quadrate gleich, dessen doppelte Seite das geometrische Mittel darstellt zwischen dem Maximalradius der Spirale und der mittleren Halbachse des Ellipsoids.“

Oder auch, wie leicht zu erkennen:

„Die Fläche, die von der Doppelspiralen eingeschlossen ist, wird durch das Rechteck aus den linearen Excentricitäten der um die beiden grösseren und um die beiden kleineren Achsen des Ellipsoids beschriebenen Ellipsen dargestellt.“

§ 16. Numerische Fälle.

Wir haben sowol für ein allgemeines als Centralellipsoid für verschiedene Fälle von *II* Kurven berechnet und gezeichnet und glauben, dass dieselben über das Aussehen der Herpolhodie und ihre Veränderung mit *II* vollkommenen Aufschluss geben.

Für das Centralellipsoid haben wir dabei

$$A = \frac{1}{3600}, \quad B = \frac{1}{2500}, \quad C = \frac{1}{1600}$$

gewählt, wodurch die Achsen desselben 120, 100, 80 werden, also im Verhältnisse 6 : 5 : 4 stehen; für das allgemeine Ellipsoid dagegen haben wir

$$A = \frac{1}{3600}, \quad B = \frac{1}{2500}, \quad C = \frac{1}{900}$$

gewählt, wodurch 120, 100, 60 die Grössen, 6 : 5 : 3 die Verhältnisse der Achsen.

Es wird am besten sein, die für verschiedene Werte von *H* sich darbietenden Werte von V_g, V_k, Φ_K tabellarisch folgen zu lassen, etwa vom höchsten H anfangend.

1. Das Centralellipsoid $A=1:3600$, $B=1:2500$, $C=1:1600$.

$H=$	$V_g =$	$V_k =$	$\Phi_K =$	
1:10	0	0	197° 19′ 52,32″	
1:15	14,1421356	8,8191710	214° 57′ 29,64″	
1:20	17,8885438	10*	239° 14′ 0,17″ . . .	Fig. II
1:240	20	5,7735027	359° 4′ 57,10	

$H =$	$V_g =$	$V_k =$	$\Phi_K =$
1:2500	19,8997487	0	∞
1:2700	19,1485421	8,1649658	229° 42′ 49,46″
1:3000	16,7332005	10*	172° 24′ 57,60″
1:3200	14,1421356	9,3541435	152° 50′ 10,44″ . Fig. III.
1:3600	0	0	128° 26′ 42,92″

2. Ellipsoid $A = 1:3600$, $B = 1:2500$, $C = 1:900$.

$H =$	$V_g =$	$V_k =$	$\Phi_K =$
1:900	0	0	128° 58′ 16,11″
1:1600	29,5803989	19,8431348	159° 28′ 34,32″
1:2500	26,5329983	0	∞
1:3000	20,4939015	10	129° 53′ 21,91″ .. Fig. IV.
1:3600	0	0	98° 0′ 13,93″

Als Beispiele für geschlossene Kurvenzüge wählen wir jene, bei denen der halbe Wellenwinkel Φ_K die folgenden Grössen annimmt:

$\alpha)$ $\frac{4}{3}\pi = 240°$ (s. Fall 3 der I. Tabelle), $\beta)$ $2\pi = 360°$ (s. Fall 4 derselben)

$\gamma)$ $\frac{5}{6}\pi = 150°$ (s. Fall 8 der I. Tabelle), $\delta)$ $\pi = 180°$ (s. Fall 7 derselben),

$\varepsilon)$ $\frac{8}{9}\pi = 160°$ (s. Fall 2 der II. Tabelle), $\zeta)$ $\frac{3}{4}\pi =$ (s. Fall 4 d. II. Tabelle.)

Im Falle $H > B$ zu erwarten ist, nehmen wir das Trägheitsmoment $A = 1:3600$ als gegeben an, wie bei α, β, ε; wenn $H < B$ erscheint, bleibt C constant und zwar $C = 1:1600$ bei γ, δ, $C = 1:900$ bei ζ.

Verfährt man nach der im § 13 erwähnten Methode, so kommt:

3. Centralellipsoid.

$\Phi_K = \frac{4}{3}\pi = 240°$ $A = 1:3600$ $B = 1:2502{,}849$ $C = 1:1605{,}181$ $H = 1:2004{,}145$
$V_g = 17{,}82373$ $V_k = 9{,}964170\ldots$ annähernd Fig. II.

*) Die Werte 10 sind beide Maximalwerte von V_k. Nach der Schlussbemerkung des § 3 muss daher die mittlere Achse das arithmetische Mittel der andern Achsen des Ellipsoids sein.

$\Phi_K = 2\pi = 360^0$ A=1:3600 B=1:2501,999 C=1:1603,573 H=1:2402,144
$Vg = 19{,}95554$ $V_k = 5{,}761692$ . . . . . Fig. V.

$\Phi_K = \pi = 180^0$ A=1:3430,000 B=1:2422,463 C=1:1600 H=1:2879,387
$Vg = 15{,}60537$ $V_k = 14{,}24862$ . . . . . Fig. VI.

$\Phi_K = \frac{5}{6}\pi = 150^0$ A=1:3648,975 B=1:2522,039 C=1:1600 H=1:3239,180
$Vg = 14{,}40055$ $V_k = 9{,}525128$ .. annähernd Fig. III.

4. Allgemeines Ellipsoid.

$\Phi_K = \frac{8}{9}\pi = 160^0$ A=1:3600 B=1:2500,884 C=1:902,172 H=1:1601,609
$Vg = 29{,}54109$ $V_k = 19{,}81716$

$\Phi_K = \frac{3}{4}\pi = 135^0$ A=1:3375,000 B=1:2281,122 C=1:900 H=1:2725,223
$Vg = 19{,}68945$ $V_k = 10{,}29359$. .. annähernd Fig. IV.

Die Formänderungen, die hiebei aufgetreten, sind ganz geringe in den Fällen, in welchen Φ_K schon nahe einem mit π rationalen Wert gelegen ist und auch schon sehr unbedeutend in den andern.

So vergrössert sich z. B. bei $\Phi = 360^0$ die mittlere Halbachse, wenn die Halbachsen des ursprünglichen 60 mm, 50 mm, 40 mm gross*) sind, beiläufig nur um $\frac{1}{100}$ mm, die kleine Halbachse um $\frac{4}{100}$ mm, der Abstand der invariablen Ebene um $\frac{1}{100}$ mm, also schon minutiöse Grössen.

Bei der bedeutendsten Aenderung, $\Phi = 135^0$, hat sich verkleinert, wenn die Halbachsen des intacten Ellipsoids 60 mm, 50 mm, 30 mm lang, die mittlere um etwa $1\frac{1}{4}$ mm, der Abstand um $2\frac{1}{2}$ mm, fürs ganze also auch nicht bedeutend.

§ 17. Die Herpolhodie des einschaligen Hyperboloids.

Lassen wir ein einschaliges Hyperboloid oder auch dessen Polhodie auf der invariablen Ebene rollen, so geht durch die bekannte Aenderung von C in $-C$ jede beim Ellipsoid entwickelte Formel in die beim einschaligen Hyperboloide giltige über; wird diese Vorzeichenänderung consequent auch in den Formeln (16) berücksichtigt — dieselben bleiben richtig —, so ist deutlich,

*) Die Figuren besitzen bezüglich dieser Annahme absolute Grösse, nur die Fig. IX. ist halb so gross angegeben, als sie sein sollte.

dass wir genau dieselben elliptischen Funktionen wie früher erhalten. Die Anfangslage der jetzigen Fläche stimme gleichfalls mit der beim Ellipsoid gewählten überein, so haben wir insbesondere wieder

$$V^2 = \frac{G^2 n^2}{\cos^2 \operatorname{am} ia} \left\{ A^2 \operatorname{am} ia - k^2 \cos^2 \operatorname{am} ia \sin^2 \operatorname{am} u \right\}$$

$$\Phi_u = \frac{u}{Gn\sqrt{H}} \mp u \cdot \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 ia \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1 (u - ia)}{\Theta_1 (u + ia)}$$

$$\Phi_K = K \left\{ \frac{1}{Gn\sqrt{H}} + E(a, k') \mp \frac{a}{K} (K - E) \right\},$$

wo die oberen Zeichen für $H > B$, die untere für $H < B$ Geltung besitzen; im ersten Falle ist $B > A$, C negativ, im zweiten $C > B$, A negativ zu nehmen, d. h. man hat hier, um dasselbe Hyperboloid mit dem bestimmt gegebenen Achsen $\frac{2}{\sqrt{A}}, \frac{2}{\sqrt{B}}, \frac{2i}{\sqrt{C}}$ beizuhalten, A mit $-C$ in den Formeln zu vertauschen.

Uns über die weitere Diskussion von V, Φ_u Φ_K und der in sie eingehenden Constanten einzulassen, kann natürlich unsere Aufgabe nicht sein. Dieselbe ist der früher gemachten Schritt für Schritt analog und liefert — mutatis mutandis — fast die nemlichen Resultate; zudem legen wir auf die Flächen der Hyperboloide, sowie später des Cylinders etc. den Wert nicht, wie auf das Ellipsoid.

Die Frage nach den Wendepunkten der Kurve unterscheidet sich nur im Endwert, nicht im Gange selbst, von der früheren. Man erhält als Bedingungen, zunächst für $H > B$,

$$\sin^2 \operatorname{am} u_1 = \sin^2 \operatorname{am} u_2 = \frac{B(H-A)}{H(B-A)}$$

$$\sin^2 \operatorname{am} u_3 = \frac{(H-A)(C+B-A)}{(B-A)(2H+C-A-B)}$$

sodann für $H < B$

$$\sin^2 \operatorname{am} u_1 = \sin^2 \operatorname{am} u_2 = \frac{B(H+C)}{H(B+C)},$$

$$\sin^2 \operatorname{am} u_3 = \frac{(H+C)(C+B-A)}{(B+C)(2H+C-A-B)}.$$

Es gelingt nun leicht, den folgenden Satz als wahr zu finden:

„Wendepunkte können in der durch das Rollen eines einschaligen Hyperboloids erzeugten Herpolhodie niemals auftreten, wenn der Abstand der invariablen Ebene grösser ist als die halbe kleinere reelle Achse; weiters ist ihr Erscheinen unmöglich auch im andern Falle, solange $C > B-A$ d. h. wenn zwischen den absoluten Grössen A, B, C eine ähnliche Relation besteht, wie beim Centralellipsoid.

Ist $H > B$ und $C < B-A$, so können Wendepunkte auftreten, unter der Bedingung jedoch, dass

$$\frac{(H-A)\,(C+B-A)}{(B-A)\,(2H-C-A-B)} < 1 \text{ bleibt.}“$$

Im übrigen mag die folgende Tabelle über das Wichtigste noch Aufschluss für den allgemeinen Fall geben.

$A = 1:3600,\ B = 1:2500,\ -C = 1:1600.$

$H =$	$V_g =$	$V_k =$	$\Phi_K =$
1:3600	0	0	45° 28′ 55,02″
1:3200	24,49489	9,354143	54° 31′ 4,18″
1:3000	30,33150	10	63° 17′ 18,86″
1:2700	37,71236	8,164966	87° 50′ 0,96″
1:2500	42,47352	0	∞
1:2400	44,72136	12,90994	171° 24′ 13,93″
1:2000	53,66563	30	140° 23, 54,92″
1:1600*	63,24555	42,42641	107° 16′ 49′29″
1:900	86,60254	66,66667	86° 58′ 38′06″
1:400*	126,4911	102,4695	78° 6′ 52,69″
1:100	243,9262	201,9901	74° 7′ 1,68″
∞	∞	∞	72° 44′ 24,28″

Die Sectorfläche wird

$$S = \frac{Gn}{2\sqrt{H}}\left[E_u + u \cdot \frac{H-B}{C+B}\right];$$

sie ist grösser als die für gleichwertige H beim entsprechenden Ellip-

*) Zwischen diesen Werten liegt jener Wert von H, der $V_g - V_k$ zum Minimum macht. s. § 7.

soid, da einerseits $\frac{Gn}{2\sqrt{H}}$ einen grösseren Wert hat, andererseits zu E_u hier ein additives Glied hinzukommt.

Im Falle $H = B$ wird die Herpolhodie wieder zur Spiralen

$$V = \frac{2G'n'}{\frac{\Phi}{c}\cdot G'n'\sqrt{B} - \Phi \cdot \frac{G'n'\sqrt{B}}{c}}.$$

§ 18. Die Herpolhodie beim zweischaligen Hyperboloid.

Nach § 3 unserer Abhandlung ist der grösste Radiusvector der Polhodie dieser Fläche γ, der kleinste β, dagegen α stets imaginär. Die Normierung des Integrals

$$t - t_0 = \frac{G}{2}\int_0^u \frac{d(U^2)}{\sqrt{(U^2-\alpha^2)\,(U^2-\beta^2)\,(\gamma^2-U^2)}} \qquad (\S\ 9)$$

wird dadurch eine von der früheren ganz verschieden.

Man muss hier $U^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2-a^2}{Y^2}$ substituieren und erhält als Modul des elliptischen Integrals

$$k = \sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(C-B)\,(H-A)}{(C+A)\,(H+B)}}$$

Eine Unterscheidung $H \gtrless B$, die keinen Sinn hätte, wird von vorn herein dadurch ausgeschlossen, dass α^2 negativ, also $\gamma^2-\alpha^2$ stets $> \gamma^2-\beta^2$.

Im Sinne der jetzigen Normierung ist nun wieder Gn, sin am ia etc. einzuführen; durch Wahl derselben Bezeichnung Gn, sin am ia ... wie früher kommen genau dieselben Resultate wie sie bei Ellipsoid und einschaligem Hyperboloid bereits da waren; nur wenn rückwärts A, B, C, H wieder eingesetzt werden, lassen sie einen Unterschied hervortreten und kann man sich merken, dass die nunmehrigen Formeln aus denen des Ellipsoids können abgeleitet werden, wenn man in letzteren setzt

$$\text{für } A \text{ — } B, \text{ für } B \text{ — } C, \text{ für } C \text{ — } A.$$

Der Radiusvector V und die Polarwinkel ϑ_n und ϑ_K werden ausgedrückt durch

$$V^2 = \frac{G^2n^2}{\cos^2 \text{am ia}}\left[A^2 \text{am ia} - k^2\cos^2 \text{am ia}\sin^2 \text{am } u\right],$$

$$\Phi_u = \frac{u}{Gn\sqrt{H}} - u \cdot \frac{\partial}{\partial a} \log H_1 \, ia + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1 (u - ia)}{\Theta_1 (u - ia)},$$

$$\Phi_K = K \left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} - E (a_1 k') + a \frac{(K - E)}{K} \right].$$

Die Bedingungen für das Auftreten von Wendepunkten in der Herpolhodie sind

$$\sin^2 \text{am } u_1 = \sin^2 \text{am } u_2 = \frac{C (H + B)}{H (C - B)},$$

welcher Wert grösser als die Einheit, darum unbrauchbar ist, und

$$\sin^2 \text{am } u_3 = \frac{(H + B) (A + C - B)}{(C - B)(C + B - A + 2H)},$$

welcher nur dann < 1, wenn $C > A + B$, analog wie beim Ellipsoid d. h.

„Wendepunkte treten für die Parameterwerte u_3, $2K - u_3$, $2K + u_3$ . . . nur dann ein, wenn sich aus den absoluten Grössen A, B, C kein Dreieck construieren lässt, dagegen niemals, wenn dies der Fall ist.“

(Ein Hyperboloid von der letzten Eigenschaft könnte man ein „Centralhyperboloid“ nennen, indem die Bedingung eines Centralellipsoids in ähnlicher Weise beim ein- und zweischaligen Hyperboloid sich fortgeerbt hat.)

Numerische Resultate geben wir wieder in der folgenden Tabelle:

$A = 1:3600, \; - B = 1:2500, \; - C = 1:1600.$

$H =$	$V_g =$	$V_k =$	$\Phi_K =$
1:3600	0	0	33° 7′ 47,90″ *
1:3200	26,19269	24,49489	34° 5′ 40,96″
1:2400	49,49747	44,72136	36° 49′ 55,57″
1:2000	60	53,66563	38° 20′ 17,16″
1:1600	71,58911	63,24555	40° 23′ 10,03″
1:900	100,9950	86,60254	44° 55′ 51,53″
1:100	301,6621	243,9262	52° 41′ 16,15″
∞	∞	∞	53° 59′ 31,85″

Anmerkung. Da hier $C < A + B$, treten keine Wendepunkte ein.

*) Der Polarwinkel wird eigentlich hier negativ, was eben dem Factum entspricht, dass, wenn die rechte Hälfte des 2 schaligen Hyperboloids oberhalb der invariablen Ebene rollen soll, der Mittelpunkt der Fläche unterhalb der Ebene zu liegen kommt, die beschriebenen Winkel also alle im umgekehrten Sinn erzeugt erscheinen. Wir betrachten natürlich nur die absoluten Grössen von Φ_K.

Der vom Radiusvector beschriebene Flächensector wird hier

$$S = \frac{Gn}{2\sqrt{H}}\left[E_u - u.\frac{H+B}{C-B}\right];$$

er ist kleiner als der für gleichwertiges H bei den entsprechenden Flächen des Ellipsoids und einschaligen Hyperboloids entstandene.

Da ein Spezialfall wie $H = B$ hier nicht existiert, kann von einer Spirale natürlich keine Rede sein.

§ 19. Die Herpolhodie der Rotationsflächen.

In Rücksicht auf die über die Radien V_g, V_k in den §§ 5, 6, 7 aufgestellten Formeln sprechen wir folgende Sätze aus:

„Je mehr sich das rollende Ellipsoid einem Rotationskörper nähert, desto schmaler wird der Ring der Herpolhodie. Es bewegt sich dabei der Radiusvector V gegen den grösseren Radius V_g, wenn die mittlere Achse des Ellipsoids gegen die grosse oder kleine angeht, dagegen bewegt sich V gegen den kleineren Radius V_k, wenn umgekehrt die grosse resp. kleine Achse immer mehr der mittleren sich nähern.“

Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\Phi}{dt}$ oder besser

$$\frac{d\Phi}{du'} = \frac{1}{Gn\sqrt{H}}\left[1 + \frac{(H-A)(H-B)(C-H)}{ABCH.V^2}\right],$$

wird, da V durch V_g oder V_k zu ersetzen ist, also constant wird, ebenfalls eine Constante.

1. $H > B$, abgeplattetes Rotationsellipsoid (Sphäroid)

$$\frac{d\Phi}{du} = \sqrt{\frac{CH}{(H-A)(C-A)}}, \tag{33}$$

wenn B abnehmend gegen A gegangen; $C > H > A$.

$$\frac{d\Phi}{du} = \sqrt{\frac{CH}{(H-B)(C-B)}},$$

wenn A zunehmend gegen B gegangen; $C > H > B$.

2. $H < B$, verlängertes Rotationsellipsoid.

$$(34)\quad \frac{d\Phi}{du} = \sqrt{\frac{AH}{(C-H)(C-A)}},$$

wenn B zunehmend gegen C gegangen; $C > H > A$.

$$\frac{d\Phi}{du} = \sqrt{\frac{AH}{(B-H)(B-A)}},$$

wenn C abnehmend gegen B gegangen; $B > H > A$.

Die Polarwinkel selbst werden nach der getroffenen Unterscheidung

$$(35)\quad \begin{aligned} \Phi &= u\sqrt{\frac{CH}{(H-A)(C-A)}} \quad \text{oder} \\ \Phi &= u\sqrt{\frac{CH}{(H-B)(C-B)}} \quad \text{beim Sphäroid,} \end{aligned}$$

$$(36)\quad \begin{aligned} \Phi &= u\sqrt{\frac{AH}{(C-H)(A-C)}} \quad \text{oder} \\ \Phi &= u\sqrt{\frac{AH}{(B-H)(B-A)}} \quad \text{beim verlängerten Rotationsellipsoid.} \end{aligned}$$

Die Winkel Φ_K einer halben Welle nähern sich auch wieder einer festen Grenze, indem, da $K = \frac{\pi}{2}$,

$$(37)\quad \begin{aligned} \Phi_K &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{CH}{(H-A)(C-A)}} \quad \text{oder} \\ \Phi_K &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{HC}{(H-B)(C-B)}} \quad \text{beim Sphäroid,} \end{aligned}$$

$$(38)\quad \begin{aligned} \Phi_K &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{HA}{(C-H)(C-A)}} \quad \text{oder} \\ \Phi_K &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{AH}{(B-H)(B-H)}} \quad \text{beim verlängerten Rotationsellipsoid.} \end{aligned}$$

Vergleicht man die für Φ_K so zu erhaltenden Werte mit denen im allgemeinen Fall des Ellipsoids für gleichwertige H, so kommt durch Untersuchung der Grösse $\frac{1}{Gn\sqrt{H}}$ und der That-

sache, dass statt des allgemeinen V hier bald V_g, bald V_k zu setzen ist, folgende Erscheinung:

„Nähert sich das rollende Ellipsoid einem Rotationsellipsoid dadurch, dass die äusseren Achsen gegen die mittlere angehen, so werden die Winkel Φ_K stets grösser; nähert es sich demselben dadurch, dass die mittlere Achse gegen die äusseren geht, so können die Winkel Φ_K grösser oder kleiner werden."

Im ersten Falle bleibt, sowol beim Sphäroid als verlängerten Rotationsellipsoid, der Charakter des Centralellipsoids notwendig erhalten, im letzten nicht.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei den Hyperboloiden.

Eine Bestätigung der 2 in diesem § ausgesprochenen Gesetze ist in den folgenden numerischen Fällen wahrzunehmen, wenn man sie mit den früher für das allgemeine Ellipsoid aufgestellten entsprechenden vergleicht:

1. Centralsphäroid. $A = B = 1:2500 \quad C = 1:1600.$

$H =$	$V_g = V_k =$	$\Phi_K =$
1:1600	0	250°
1:1800	15,8745079	283° 28′ 24,06″
1:2000	10	335° 24′ 36,72″
1:2400	5,7735027	375°
1:2500	0	∞

2 Allgemeines Sphäroid $B = A = 1:3600 \quad C = 1:1600.$

$H =$	$V_g = V_k =$	$\Phi_K =$
1:1600	0	162°
1:1800	14,14214	170° 45′ 48,00″
1:2000	17,88854	183° 25′ 17,42″
1:2400	20	209° 8′ 27,95″
1:2500	19,89975	218° 26′ 26,72″
1:2700	19,14854	241° 29′ 43,94″
1:3200	14,14214	363° 14′ 35,27″
1:3600	0	∞

3. Verlängertes allgemeines Rotationsellipsoid.
$A = 1:3600 \quad B = C = 1:1600.$

$H =$	$V_g = V_k =$	$\Phi_K =$
1:1600	0	∞
1:1800	14,14214	227° 41′ 2,37″
1:2000	17,88854	162° 59′ 48,82″
1:2400	20	113° 50′ 31,18″
1:2500	19,89976	107° 19′ 52,54″
1:2700	19,14851	97° 5′ 5,21″
1:3200	14,14214	80°, 2′ 59,41
1:3600	0	72°

4. Verlängertes Rotationscentralellipsoid.
$A = 1:3600 \quad C = B = 1:2500.$

$H =$	$V_g = V_k =$	$\Phi_K =$
1:2500	0	∞
1:2700	8,1649658	479° 35′ 57,62″
1:3000	10	305° 23′ 23,78″
1:3200	9,3541435	256° 16′ 53,14″
1:3600	0	261° 33′ 20,00″

§ 20. Klassifikationen der verschiedenen Herpolhodieformen.

Wir unterscheiden:

1. Ein Centralellipsoid rolle auf einer invariablen Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner als die mittlere Halbachse ist. Typus I. Figuren II und V.

2. Dasselbe rolle auf einer Ebene, deren Abstand grösser als die mittlere Halbachse. Typus II. Figuren III und VI.

3. Ein allgemeines Ellipsoid rolle auf einer invariablen Ebene, deren Abstand grösser als die mittlere Halbachse.
Typus III. Figur IV.

4. Ein einschaliges Hyperboloid rolle auf einer invariablen Ebene, deren Abstand kleiner ist als die kleinere der reellen Halbachsen und es sei die Schlussbedingung des im § 17 aufgestellten Satzes erfüllt. Typus IV. Figur VII.

5. Ein allgemeines zweischaliges Hyperboloid, bei dem $A > C - B$,* rolle auf einer invariablen Ebene.

Typus V. Figur IX.

Unter einer dieser Formen erscheint jedesmal die Herpolhodie für eine wie immer gestaltete Mittelpunktsfläche II. Grades. — Durch die für je einen wirklichen Fall berechneten numerischen Werte sind wir weiter in den Stand gesetzt, die Herpolhodien für gleiche H verschiedener Flächen in Bezug auf die Radien V_{g_r} V_k und den Winkel Φ_K zu vergleichen.

Das bewegliche Coordinatensystem der 3 Hauptachsen.

Durch das Abrollen der Fläche zweiten Grades auf der invariablen Ebene beschreiben die Hauptachsen OX', OY', OZ' Kegel um den Mittelpunkt O, deren Eigenschaften durch Annahme eines festen Coordinatensystems bestimmt werden können. Als Z-Achse eines solchen Systems werde die invariable Linie, positiv nach oben, gewählt, als Richtung der X-Achse die Polarachse der Herpolhodie und als die der Y-Achse eine zur X-Achse in der Weise errichtete Senkrechte, dass X sich gerade so wie der Körper drehen müsste, um die Lage dieser Senkrechten anzunehmen.

Die Winkel der 3 Hauptachsen gegen dieses Coordinatensystem zu irgend einer Zeit t können unschwer aus den Eigenschaften der Polkurven abgeleitet werden.

§ 21. Die rechtwinkligen Coordinaten der Polkurven in Funktion der Zeit.

Wird der aus (11) zu entnehmende Wert von U^2 in die Formeln (3) eingesetzt und x', y', z' geschrieben, so kommt für die Coordinaten der Polhodie nach leichter Rechnung

$$x'^2 = \frac{H}{A^2} \cdot \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, ia}, \quad y'^2 = \frac{H}{L^2} \cdot \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, ia}{\cos^2 \mathrm{am}\, ia},$$

$$z'^2 = -\frac{H}{C^2} \cdot \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, ia}{\cos^2 \mathrm{am}\, ia}.$$

*) Der Fall $A < C - B$ ist entweder unter Typus III oder IV enthalten.

Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung Θ um die instantane Drehachse ist, wie eingangs des § 9 erwähnt, der Länge des Radiusvector proportional, $\Theta = \frac{U}{G}$, folglich sind deren Componenten p, q, r, um die Hauptachsen

$$p = \frac{x'}{G}, \; q = \frac{y'}{G}, \; r = \frac{z'}{G}$$

Ist weiter die invariable Linie gegen die Hauptachsen unter Winkeln geneigt, deren cos a'', b'', c'', so finden die bekannten Relationen*) statt

$$p = \frac{\sqrt{H}}{AG} a'', \; q = \frac{\sqrt{H}}{BG} b'', \; r = \frac{\sqrt{H}}{CG} c'', \text{ also ist}$$

$$x' = \frac{\sqrt{H}}{A} a'', \; y' = \frac{\sqrt{H}}{B} b'', \; z' = \frac{\sqrt{H}}{C} c'', \text{ und}$$

$$a''^2 = \frac{\cos^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} ia}, \; b''^2 = \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \, . \, \Delta^2 \operatorname{am} ia}{\cos^2 \operatorname{am} ia},$$

$$c''^2 = -\frac{\Delta^2 \operatorname{am} u \, . \, \sin \operatorname{am} ia}{\cos^2 \operatorname{am} ia}.$$

Um hieraus die Neigungscosinus selbst richtig zu erhalten, beachte man folgende kleine Ueberlegung, die aus unseren geometrischen Resultaten entspringt (Fig. X u. XI)

Für $H > B$ ist die Anfangslage des rollenden Ellipsoids jene, bei der die $X'Z'$ Ebene in die XZ Ebene fällt, die Y' Achse mit der Y Achse coincidiert; die X' Achse bildet mit der Z Achse dabei einen stumpfen, und Z' damit stets einen spitzen Winkel. Lässt man, von der + Z aus geschen, das Ellipsoid im Sinne eines Uhrzeigers sich drehen, so erreicht man natürlich dasselbe, als wenn man bei still stehender Fläche die Z Achse d. h. die Achse des Kräftepaars umgekehrt rotieren lässt. Hiedurch kommt

$$a'' = -\frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ia}, \; b'' = +\frac{\sin \operatorname{am} u \; \Delta \operatorname{am} ia}{\cos \operatorname{am} ia},$$

$$c'' = +\frac{\Delta \operatorname{am} u \, . \, \operatorname{tg} \operatorname{am} ia}{i}.$$

*) Vergl. z. B. Poinsot's I Theil der théorie nouvelle . . oder den Anfang des II.

Für $H < B$ gilt dieselbe Anfangslage, nur haben Z'- und X'-Achse ihre Rollen insoferne vertauscht, als Z' gegen die Z-Achse im ersten Moment unter spitzem Winkel geneigt ist, während X' durchaus mit ihr einen stumpfen Winkel macht; es wird, wenn noch $-\frac{\operatorname{tg am ia}}{i}$ statt $+\frac{\operatorname{tg am ia}}{i}$ berücksichtigt wird,

$$a'' = +\frac{\Delta\operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg am ia}}{i}, \quad b'' = \frac{\sin\operatorname{am} u \,.\, \Delta\operatorname{am ia}}{\cos\operatorname{am ia}},$$

$$c'' = \frac{\cos\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am ia}}.$$

Wir bringen nun beide Formen unter dieselbe Gestalt, wenn wir wieder die Voraussetzung machen, dass für $H > B \quad C > B > A$, für $H < B \quad A > B > C$ und erhalten

$$(39) \quad a'' = \mp\frac{\cos\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am ia}}, \quad b'' = +\frac{\sin\operatorname{am} u \,.\, \Delta\operatorname{am ia}}{\cos\operatorname{am ia}},$$

$$c'' = +\frac{\Delta\operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg am ia}}{i}.$$

Die Werte x', y', z' richten sich mit ihren Vorzeichen nach dem Ast der Polhodie, den man im Auge hat und sind

$$(40) \quad x' = \frac{\sqrt{H}}{A}(a''), \quad y' = \frac{\sqrt{H}}{B}(b''), \quad z' = \frac{\sqrt{H}}{C}(c''),$$

wo die Klammern die absoluten Werte nur bedeuten sollen.

Die rechtwinkeligen Coordinaten der Herpolhodie x, y, ($z = \frac{1}{\sqrt{H}}$ ist constant!) ergeben sich aus den Polarcoordinaten. Es war bekanntlich der Polarwinkel

$$\Phi = u\left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} \mp \frac{\partial}{\partial\alpha}\log H_1\,\mathrm{ia}\right] \mp \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-\mathrm{ia})}{\Theta^2(u+\mathrm{ia})},$$

aus einem mit t proportionalen und einem damit periodischen Glied bestehend gefunden worden. Erteilen wir der Polarachse X und mit ihr der Achse Y eine gleichförmige Drehung in der invariablen Ebene, im Sinne der anfangs erfolgten Rotation der Fläche, mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(41) \quad \Phi' = n\left[\frac{1}{Gn\sqrt{H}} \mp \frac{\partial}{\partial\alpha}\log H_1\,\mathrm{ia}\right]$$

und setzen den Winkel $\Phi'(t-t_0) - \Phi = \psi$, so kommt

$$\psi = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1 (u - ia)}{\Theta_1 (u + ia)},$$

$$\frac{\pm i^{\psi}}{c} = \sqrt{\frac{\Theta_1 (u - ia)}{\Theta_1 (u + ia)}},$$

$$(42) \qquad \cos \psi = \frac{\Theta_1 (u + ia) + \Theta_1 (u - ia)}{2 \sqrt{\Theta_1 (u + ia)\ \Theta_1 (u - ia)}},$$

$$\sin \psi = \mp \frac{\Theta_1 (u + ia) - \Theta_1 (u - ia)}{2 \sqrt{\Theta_1 (u + ia)\ \Theta_1 (u - ia)}}.$$

Wählt man nun passend das rotierende Coordinatensystem der Achsen X, Y zum neuen Coordinatensystem und bezeichnet es mit (X), (Y), so kann man in Bezug auf es die Coordinaten (x), (y) der Herpolhodie aufstellen, indem ψ der Polarwinkel bezüglich des neuen Systems. Die Uebergänge beider Systeme werden durch die Transformationsformeln vermittelt:

$$(x) = x \cos \psi + y \sin \psi \qquad x = (x) \cos \psi - (y) \sin \psi$$
$$(y) = -x \sin \psi + y \cos \psi \qquad y = (x) \sin \psi + y \cos \psi$$

Die rechtwinkligen Coordinaten (x), (y) eines Punktes der Herpolhodie sind

$$(x) = V \cos \psi, \quad (y) = V \sin \psi, \quad \text{wo}$$

$$V = \frac{Gf}{H_1 \text{ia}\, \Theta u} \sqrt{\Theta_1 (u + ia)\ \Theta_1 (u - ia)},$$

also schliesslich

$$(43) \qquad (x) = \frac{Gf}{2} \cdot \frac{\Theta_1 (u + ia) + \Theta_1 (u - ia)}{H_1 \text{ia}\, \Theta u},$$

$$(y) = \mp \frac{Gf}{2} \cdot \frac{\Theta_1 (u + ia) - \Theta_1 (u - ia)}{i\, H_1 \text{ia}\, \Theta u}.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten um die (X) Achse und (Y) Achse sind proportional mit (x) und (y) und ist der Proportionalitätsfactor $\frac{1}{G}$, so dass

$$(44) \qquad w_x = \frac{f}{2} \cdot \frac{\Theta_1 (u + ia) + \Theta_1 (u - ia)}{H_1 \text{ia}.\ \Theta u},$$

$$w_y = \mp \frac{f}{2} \cdot \frac{\Theta_1 (u + ia) - \Theta_1 (u - ia)}{i\, H_1 \text{ia}\ \Theta u}, \qquad w_z = \frac{1}{G_1 H}.$$

§ 22. Die 9 Cosinus der Neigungen der Achsen X', Y', Z' gegen die Achsen (X), (Y), Z.

Dieselben mögen in leicht verständlicher Weise durch das nachstehende Schema ausgedrückt sein:

	x'	y'	z'
(x)	a	b	c
(y)	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Es folgt

$$(45)\qquad \begin{cases} (x) = ax' + by' + cz' \\ (y) = a'x' + b'y' + c'z' \\ z = a''x' + b''y' + c''z' \end{cases}$$

und durch Division mit G

$$(46)\qquad \begin{cases} w_x = ap + bq + cr \\ w_y = a'p + b'q + c'r \\ w_z = a''p + b''q + c''r = \frac{1}{GVH} \end{cases}$$

Mittels der letzteren Relationen aber und denen der orthogonalen Substitution, sowie a'', b'', c'' lassen sich die 6 noch unbekannten Neigungscosinus finden.

Dieselben, welche in der Theorie der Rotation, besonders seit Jacobi sie mittels elliptischer Funktionen ausgedrückt hat, eine fundamentale Rolle spielen, sind sonach aus den Gleichungen der Herpolhodie durch leichte algebraische Reduktionen zu erhalten. Dieser Weg weicht insoferne von dem der uns bekannten verschiedenen Autoren wesentlich ab, als die letzteren zuerst die 9 cos — etwa mittels der gewöhnlichen Eulerschen Winkel — entwickelt und dann erst w_x, w_y *) gesucht haben

Wir gedenken nur für ein Wertepaar, etwa c und c' die Rechnung bis ins Detail durchzuführen und uns bei den andern kürzer zu fassen.

*) J. S. 165—169.

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (46) mit c, die zweite mit c' und addieren, so kommt unter Berücksichtigung der folgenden Relationen der orthogonalen Substitution

$$b\,c + b'c' = -\,b''c'' \qquad c\,a + c'a' = -\,c''a''$$

$$w_x\,c + w_y\,c' = p\,.\,-a''c'' + q\,.\,-b''c'' + r(1 - c''^2) =$$

$$= r - c''.\,\frac{1}{G\sqrt{H}},$$

$$w_x\,c + w_y\,c' = -\,\frac{(C-H)\,c''}{CG\sqrt{H}}$$

Multipliziert man die erste Gleichung dagegen mit c', die zweite mit c, subtrahiert und wendet die Gleichungen

$$a'c - a\,c' = b'' \qquad b'a - b\,a' = c'' \qquad c'b - c\,b' = a''$$

an, so kommt

$$w_x\,c' - w_y\,c = p\,.\,-b'' + q\,.\,a'' = -\,\frac{(B-A)\,\sqrt{H}\,.\,a''b''}{CG}.$$

$$(w_x c + w_y c') + i\,(w_x c' - w_y c) = (c + i\,c')\,(w_x - i\,w_y) =$$

$$= -\,\frac{(B-A)\,\sqrt{H}}{ABG}\left[\frac{(C-H)\,AB}{(B-A)\,CH}\,c'' + i\,a''\,b''\right].$$

Letztere Gleichung schreibt sich, wenn ellipstiche Funktionen aus (16) und (17), die Werte von a'', b'', c'' aber aus (39) eingeführt werden:

$$(c + i\,c')\,(w_x - i\,w_y) = \mp\,\frac{n}{\cos^2 \mathrm{am}\,\mathrm{i}\bar{a}}\cdot$$

$$\cdot\,[\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,\mathrm{ia} + k^2 \sin\mathrm{am}\,u\;\cos\mathrm{am}\,u\;\sin\mathrm{am}\,\mathrm{ia}\;\cos\mathrm{am}\,\mathrm{ia}]$$

und weiterhin unter Beachtung des Additionstheoremes der elliptischen Integrale *)

$$(c + i\,c')\,(w_x - i\,w_y)$$

$$= \mp\,\frac{n}{\cos^2 \mathrm{am}\,\mathrm{ia}}\;\Delta\,\mathrm{am}\,(u \mp \mathrm{ia})\;.\;(1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\,u\;.\;\sin^2\mathrm{am}\,\mathrm{ia}).$$

Nun ist

$$w_x - i\,w_y = \frac{\theta_1\,(u \mp \mathrm{ia})}{2\,H_1\,\mathrm{ia}\;.\;\theta u}, \quad \Delta\,\mathrm{am}\,(u \mp \mathrm{ia}) = \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_1\,(u \mp \mathrm{ia})}{\theta_1\,(u \mp \mathrm{ia})},$$

$$\cos\mathrm{am}\,\mathrm{ia} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\;.\;\frac{H_1\,\mathrm{ia}}{\theta\,\mathrm{ia}},$$

*) Fundamenta nova. S. 32.

$$1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \mathrm{i}a = \frac{\theta(u+\mathrm{i}a) \cdot \theta(u-\mathrm{i}a) \cdot \theta_0^2}{\theta^2 u \; \theta^2 \mathrm{i}a} ;$$

eingesetzt, wird

$$c + i c' = \mp \frac{H_1 0 \cdot \theta(u+\mathrm{i}a)}{2 H_1 \mathrm{i}a \; \theta u} .$$ Analog findet man

$$c - i c' = \mp \frac{H_1 0 \cdot \theta(u+\mathrm{i}a)}{2 H_1 \mathrm{i}a \cdot \theta u} ,$$ also

$$(47) \qquad c = \mp \frac{H_1 0 [\theta(u+\mathrm{i}a) + \theta(u-\mathrm{i}a)]}{2 H_1 \mathrm{i}a \, \theta u} ,$$

$$c' = \frac{H_1 0 [\Theta(u+\mathrm{i}a) - \Theta(u-\mathrm{i}a)]}{2 i \, H_1 \mathrm{i}a \; \Theta u}$$

Nun folgt aus $b c' - b' c = a''$, $b c + b' c' = - b'' c''$

$$(b + i b')(c - i c') = - (b'' c'' + i a'') \text{ und}$$

$$(b - i b')(c + i c') = - (b'' c'' - i a'') ,$$

ebenso

$$(a + i a')(b - i b') = - (a'' b'' + i c'') ,$$

$$(a - i a')(b + i b') = - (a'' b'' - i c'') .$$

Man erhält, wenn man die angedeuteten Operationen ausführt, für die 4 Werte b, b', a, a' analoge Gleichungen wie für c, c'; sie mögen aus der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen sein:

(48)

$$a = \frac{\theta_1 0 \, [H(u+\mathrm{i}a) - H(u-\mathrm{i}a)]}{2 i H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u} \qquad b = \mp \frac{\Theta 0 \, [H_1(u+\mathrm{i}a) - H_1(u-\mathrm{i}a)]}{2 i \, H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u} ,$$

$$c = \mp \frac{H_1 0 \, [\Theta(u+\mathrm{i}a) + \Theta(u-\mathrm{i}a)]}{2 H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u}$$

$$a' = \pm \frac{\theta_1 0 \, [H(u+\mathrm{i}a) + H(u-\mathrm{i}a)]}{2 H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u} , \quad b' = - \frac{\Theta 0 \, [H_1(u+\mathrm{i}a) + H_1(u-\mathrm{i}a)]}{2 H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u} ,$$

$$c' = \frac{H_1 0 \, [\Theta(u+\mathrm{i}a) - \Theta(u-\mathrm{i}a)]}{2 i H_1 \mathrm{i}a \, \Theta u}$$

$$a'' = \mp \frac{\Theta_1 \mathrm{i}a \; H_1 u}{H_1 \mathrm{i}a \; \Theta u} , \qquad b'' = \frac{\Theta_1 \mathrm{i}a \; H u}{H_1 \mathrm{i}a \; \Theta u} , \qquad c'' = \frac{H \mathrm{i}a \; \Theta_1 u}{i \, H_1 \mathrm{i}a \; \Theta u} .$$

Diese 9 cos sind etwas verschieden von den von Jacobi*) gegebenen, weil Jacobi andere Lage der Coordinatensysteme und andere Anfangsbedingungen hat.

Anmerkung: Aus den 9 Neigungscosinus a, b, c . . . , wie wir sie soeben erhalten haben, können wir nun die soge-

*) J. S. 164. Ueber die Coordinatensysteme s. auch Somoff: démonstration des formules de Jacobi etc. (Crelle's J. Bd. 42. S. 95—116.)

nannten unsymmetrischen Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ leicht ableiten, welche umgekehrt Jacobi benutzt hat, um die genannten Cosinus zu finden. Ihre Aufstellung lässt nichts Besonderes erscheinen, weshalb wir von derselben abstrahieren und nur noch einige Worte den symmetrischen Euler'schen Winkeln widmen wollen.

Es ist bekannt, dass jeder Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, von einer Lage in eine beliebige andere, die er zur Zeit t einnehmen wird, gebracht werden kann durch Drehung um eine einzige Achse und diese Drehung ist völlig bestimmt durch die Winkel ϱ, σ, τ dieser Achse gegen das Coordinatensystem und den Drehwinkel Θ um diese Achse.

Diese 4 Winkel können aus den folgenden Gleichungen gefunden werden, ausgedrückt durch unsere Neigungscosinus $a, b, c \ldots$:

$$
\begin{aligned}
\cos\Theta &= \frac{a + b' + c'' - 1}{2} \\
\cos 2\varrho &= \frac{-3a + b' + c'' + 1}{a + b' + c'' - 3} \\
\cos 2\sigma &= \frac{a - 3b' + c'' + 1}{a + b' + c'' - 3} \\
\cos 2\tau &= \frac{a + b' - 3c'' + 1}{a + b' + c'' - 3},
\end{aligned}
\tag{49}
$$

wenn man für $a, b, \ldots c''$ die gefundenen Werte substituiert.

Da diese Substitution keine eleganten Resultate liefern zu wollen scheint, begnügen wir uns, dieselbe angedeutet zu haben, verweisen im übrigen in Betreff der symmetrischen Funktionen λ, μ, ν oder auch α, β, γ, δ, in den sich ϱ, σ, τ, Θ, sowie die Neigungscosinus $a, b, c \ldots$ ausdrücken, etwa auf Cayley's Darstellungen in den Reports of the British Association for advancement of science, J. 1863.

Fig. I

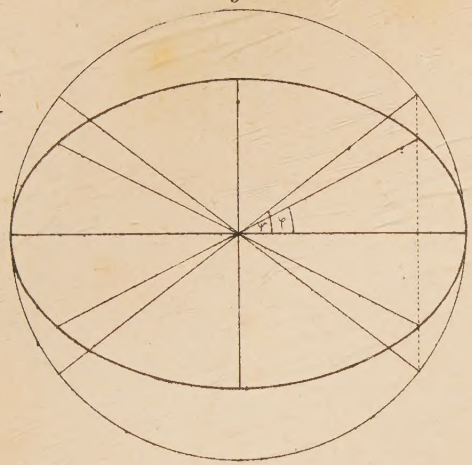


Fig. II

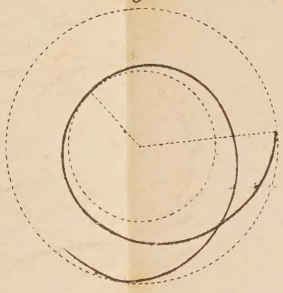


Fig. III

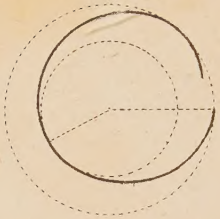


Fig. IV

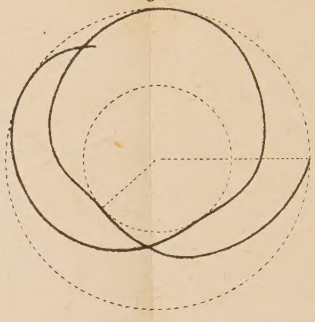


Fig. VI

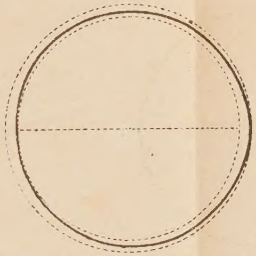


Fig. VII

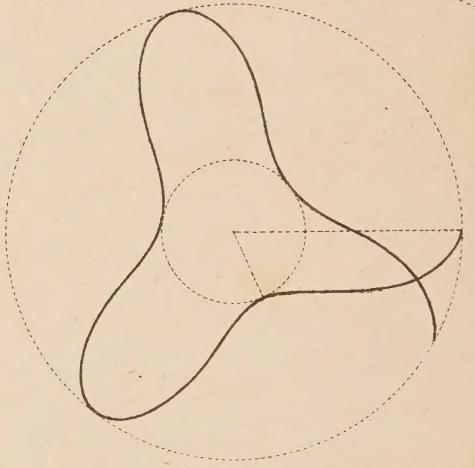


Fig. IX

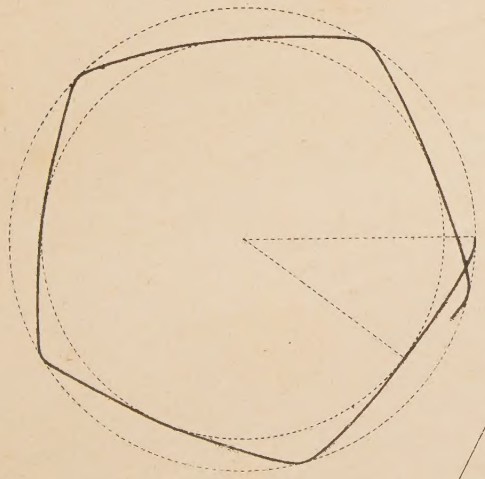


Fig. X

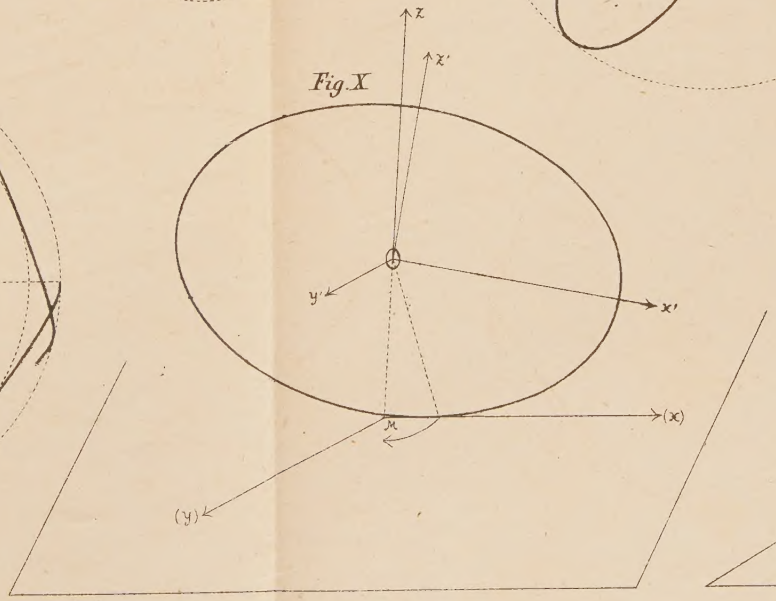
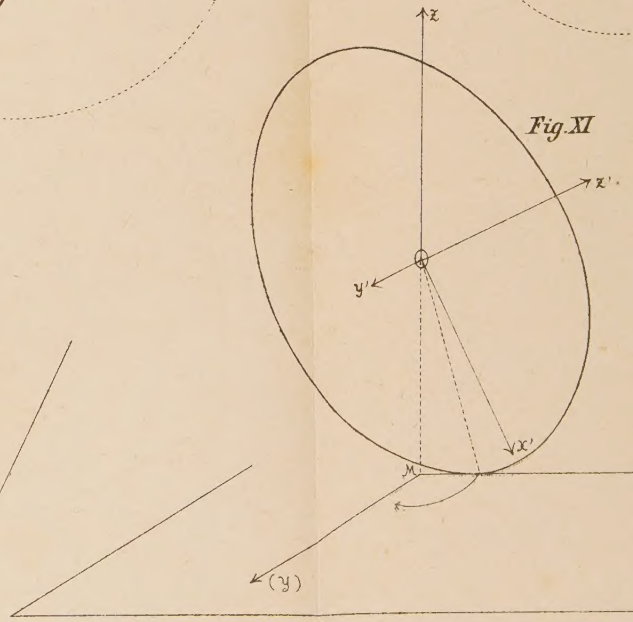



Fig. XI